

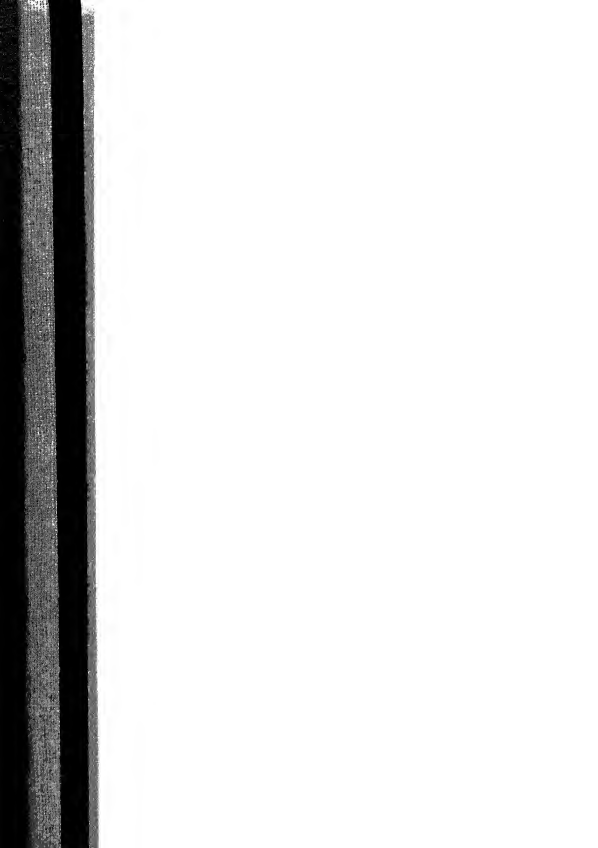


VORLE

ÜBE

PRINZIPE DE

II. T



VORLESUNG  
ÜBER DIE  
PRINZIPE DER M

VON

LUDWIG BOLTZMA

PROFESSOR DER THEORETISCHEN PHYSIK A.

II. TEIL

enthaltend: Die Wirkungsprinzipie, die Lap  
und des n. Anwenden



5-31

B 69

v. 2

Übersetzung



mathematischer Variationen zur  
 rung knüpfte, wie derselbe bei  
 Betrachtung der mechanischen  
 satzes derselben in Verwendu  
 ihm auch die Theorie kleine  
 Methode der Variation der

Aus dem Hamiltonsch  
 Wirkung leite ich die Lagra  
 lisierte Koordinaten ab, wele  
 meinen Theorie der Bewegu  
 Einführung elliptischer Koor  
 Theorie der Relativbewegung

Wichtige Anregung verda  
 diesen Gegenstand in der En  
 Wissenschaften und den Vor  
 Naturforscherversammlung in  
 welche sich daran in Kassel

Die übliche Formel fü  
 konischen Kreispendels gilt, v  
 selbe sein Gesicht immer nach  
 kehrt. Wenn es dasselbe im

# Inhaltsverzeichnis.

## I. Die Lagrangeschen Gleichungen.

- § 1. Integration der Relation, welche das Prinzip der kleinsten Wirkung für die Ver-  
schiebungen für einen Zeitmoment  
der Zeit . . . . .
- § 2. Ausschließung der Ungleichungen. Un-  
veränderliche Größen. Im vorigen Paragraphen entwickelten Satz.
- § 3. Prinzip der stationären Wirkung . . . . .
- § 4. Begriff der verallgemeinerten Koordinate . . . . .
- § 5. Begriff der verallgemeinerten Kräfte . . . . .
- § 6. Generalisierte Geschwindigkeit, lebendiges  
virtuelles Moment. Eine sehr allgemeine  
Form der Lagrangeschen Gleichungen.
- § 7. Erste Form der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen.
- § 8. Bedeutung der Variationsbedingungen für  
Systeme . . . . .
- § 9. Zweite Form der Lagrangeschen Gleichungen.
- § 10. Ableitung der Lagrangeschen Gleichungen  
der Variationsrechnung . . . . .
- § 11. Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten.

- § 23. Komponenten der Dre  
der fixen und bewe
- § 24. Die Drehung, ausged  
Kosinus der Wink  
lichen Achsen . .
- § 25. Verschiedene andere
- § 26. Die Zusammenfassung  
Fällen gefundenen  
Bewegung eines sta

### III. Die verschiedenen

- § 27. Die Gleichungen, wel  
sierte Koordinaten  
treten . . . . .
- § 28. Beispiel zum vorigen
- § 29. Variation der Integrati
- § 30. Ableitung der Gleichun  
Folgende bildet .
- § 31. Allgemeine Gleichung
- § 32. Nochmals das Prinzip
- § 33. Beispiele . . . . .
- § 34. Helmholtz' Kräfte § u
- § 35. Das Wirkungsprinzip  
Naturwissenschaft

## Inhaltsverzeichnis.

- § 45. Es wird weder Periodizität noch zyklische Bewegung vorausgesetzt . . . . .
- § 46. Das erweiterte System . . . . .
- § 47. Anwendung des Prinzips der kleinsten . . . . .
- § 48. Betrachtung periodischer Bewegungen . . . . .
- § 49. Theorie der Zykeln . . . . .
- § 50. Der integrierende Faktor des Differenti-  
zugeführten Energie . . . . .
- § 51. Adiabatische und isozyklische Bewegung . . . . .
- § 52. Hertz' reziproke Beziehungen . . . . .
- § 53. Helmholtz' Sätze über gemischte Zykeln . . . . .
- § 54. Helmholtz' Reziprozitätssätze . . . . .

## V. Die Hamilton-Jacobischen partiellen gleichungen.

- § 55. Das Prinzip der variierenden Wirkung . . . . .
- § 56. Die beiden Hamiltonschen partiellen  
gleichungen . . . . .
- § 57. Anwendung der ersten Hamiltonschen  
rentialgleichung . . . . .
- § 58. Direkter Beweis der Richtigkeit der i-  
graphen gefundenen Resultate . . . . .
- § 59. Berechnung der Wurfbewegung aus der  
partiellen Differentialgleichung als  
Beispiel . . . . .

- § 73. Integration des Störungspro-  
schen analoge partielle
- § 74. Anwendung auf die Astro
- § 75. Hamilton-Jacobische Met  
Körperproblems . .
- § 76. Gleichungen für die Stör  
durch die übrigen .

## VII. Gleichungen für

- § 77. Absolute und relative Bev
- § 78. Erster Spezialfall. Das  
dreht sich nicht . . .
- § 79. Beispiele . . . . .
- § 80. Zweiter Spezialfall. Das Ko  
begriffen . . . . .
- § 81. Interpretation der gefunde
- § 82. Weitere Spezialisierung .
- § 83. Wiedereinführung rechtwi
- § 84. Grundgleichungen für di  
Körpers relativ gegen d
- § 85. Beispiele . . . . .
- § 86. Bewegung auf einer Niveau
- § 87. Allgemeinste Gleichungen

## I. Die Lagrangeschen Gleichungen

### § 1. Integration der Relation, welche die virtuellen Verschiebungen für einen Zeitelement nach der Zeit.

Der Ausgangspunkt der nun folgenden Entwicklung ist das im § 35 des I. Theiles durch die Gleichung (1) gedrückte, mit dem d'Alembertschen Prinzip verknüpfte Gesetz der virtuellen Verschiebungen.

Es sei ganz wie in § 34 des I. Theiles ein System materieller Punkte mit beliebigen Kräften gegeben, welches noch irgend welchen Bedingungen unterworfen sein kann.



gegebenen Bedingungen wirkliche Bewegung. Irgend eine hervor und nennen sie die

Dann sei also  $x_k$  der Koordinate zu irgend eine  $x'_k$  und  $x''_k$  sei die betreffende Beschleunigungskomponente,  $m_k$  die Masse des  $k$ -ten materiellen Punktes,  $\mathbf{e}_k$  die nach den Koordinatenrichtungen der auf diesen Punkt wirkende Kraft.

Wenn wir im ganzen  $n$  Punkten  $k=1, 2, \dots, n$  sind dem  $k$  alle möglichen Gleichungen zu erteilen.

Wir bezeichnen ferner ein System als holonom, wenn sich seine Gleichungen auf ebenso viele Gleichungen

1) 
$$d\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0$$
 reduzieren lassen. Ist dies System ein nicht holonomes, so kann es durch Multiplikation mit einem Integrationsfaktor

in welcher die Integrationskonstante einen speziellen Wert hat, da durch die Differenzierung die Koordinatenwerte für einen einzigen Zeitmomenten unbestimmt bleiben und bloß der Wert für alle übrigen Zeitmomente bestimmt wird.

Unter Anwendung der soeben auseinander gesetzten Zeichnungsweise schreibt sich das mit dem vereinigte Prinzip der virtuellen Verschiebungen (93) und (184) des I. Teiles) in der

$$4) \quad \sum_1^{3n} \left( m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} - X_k \right) \delta x_k = 0$$

Wir beschränken uns im folgenden ausschließlich auf die Fälle, wo in den Bedingungsgleichungen und in dieser Relation nirgends ein Ungleichheitszeichen vorkommt, lediglich das Gleichheitszeichen gilt, und wir kehren Grund hiervon im Anfange des nächsten Abschnittes zurückkommen.

Ein vorgesetztes  $\delta$  bezeichnet hierbei die Variation, welche die betreffende Größe erleidet, wenn dem Systeme zur Zeit  $t$  eine beliebige virtuelle

zeichen dann eine absolute Zeit ist.

Unter allen möglichen Variationen der Koordinaten wenige, aber doch noch in denen sich die  $\delta x_k$  zwar aber in kontinuierlicher Weise können z. B.

5)

$\delta x$

setzen<sup>1)</sup>, wobei  $\varepsilon$  eine unendlich kleine und zu allen Zeiten konstante kontinuierliche Funktion der Zeit ist.

Dieselbe kann für jede Koordinate ganz willkürlich gewählt werden. Alle diese Funktionen  $f_k(t)$  sind die dargelegten Verschiebungen mit den Bedingungen verträglich, gerade zur betreffenden Zeit die Gleichung, welche die so müssen die  $\delta x_k$  der Gl.

Funktionen der Zeit, also durch Ausdrücke darstellbar sind, haben Integrale wie

$$8) \quad \int \delta x_k dt = \varepsilon \int f_k(t) dt$$

einen ganz bestimmten Sinn. Wir können Zeitmomente gültige Gleichung 4) mit  $dt$  n über eine beliebige Zeit z. B. von  $t_0$  bis  $t_1$  durch wir erhalten:

$$9) \quad \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^{3n} \left( m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} - X_k \right) \delta x_k dt$$

Hierbei kann  $t_0$  die Anfangszeit,  $t_1$  das Ende sein; es kann aber auch  $t_0$  ein beliebiger, späterer Zeitmoment im Verlaufe der Bewegung in der Natur wirklich vorkommenden Lage der der Gestirne, kann ja von einer Anfang der Bewegung überhaupt nicht die Rede sein, nur der Anfang,  $t_1$  das Ende des gerade betrachteten Stückes der Bewegung.

Die Variationen  $\delta x_k$  der Koordinate werden in den zunächst folgenden Paragraphen nun zude

## § 2. Ausschließung der U vorigen Paragraph

Wir haben uns hier  
in Relation 4) das Gleich  
auch das Ungleichheitszei  
weit weniger wichtig. S  
dingungsgleichungen eben  
Dann geschieht aber die  
tungen, welche die betref  
Wirksamkeit bleiben, nich  
gungen das Gleichheitszei  
ment an aber, wo die  
gekommen sind, wo jene  
geschieht die Bewegung s  
diese Vorrichtungen bewir  
würden. Es wird daher  
sein. In derselben sind jede  
Vorrichtungen wirksam sin  
treffenden Bedingungen e  
heitszeichen mit Ausschl

halb dieser Grenzen überall so, als ob die Bedingung 4) als auch in den Bedingungsgleichungen nur Gleichheitszeichen vorhanden wären; nur die Teilintegrale mehr, für andere weniger Betracht zu ziehen sind. Für die Grenzen dagegen müssen noch besondere Grenzbedingungen werden, auf welche wir aber in diesen Vorlesungen weniger eingehen werden, als sie meines Wissens untersucht worden sind.

Die Bedingung, daß das Integral 9) durch die Gleichung 5) ausgedrückten verschwinden muß, ist zwar nicht mehr so in der Form, in der wir das Prinzip der virtuellen im I. Teile ausdrückten, da jetzt die Koordinaten kontinuierliche Funktionen der Zeit sein müssen, wie im I. Teile für jeden Zeitmoment vollkommen und von den für alle übrigen Zeitmomente vollkommen unabhängig sind. Es folgen also die Bedingungen, wenn wir den Fall ausschließen, daß die Bewegungsgleichungen sich längs einer endlichen Zeit von Moment zu Moment diskontinuierlich

unbeschadet der Bedingung, dass die Funktion der Zeit sein soll, für welche der Koeffizient negative Werte oder umgekehrte Zeiten  $t_0$  und  $t_1$  den Wert Null erhält, für welche dieser Koeffizient positiven, für alle Zeiten, wo er nicht Null wird, Wert erteilen.

Würde man dasselbe für die Variationen festsetzen, der die Zeiten gleich Null sind, so würden die positiven Gliedern bestehen, die Null sein. Sein Verschwinden der Verrückungen, die von der gegebenen Endlage übergehend sonstigen Variationen der Zeit sind, hat die Elimination der durch die Bedingung der Variationen die Koeffizienten der Variationen zu allen Zeiten zu Null schon im I. Teile die Bedingung wurden.

## § 3. Prinzip der stationären W

Wir haben diejenige Bewegung, wo die Koordinate zur Zeit  $t$  den Wert  $x_k$  hat und welche unter gegebenen Anfangsbedingungen den Bewegungsgesetzen gemäß vor sich geht (eine natürliche Bewegung) unvariierter genannt. Dieser unvariierter Bewegung gegenüber, bei welcher die Koordinate den Wert  $x_k + \delta x_k$  hat, wobei  $\delta x_k$  eine infinitesimale Funktion der Zeit ist, so macht die Bewegung jeder materieller Punkt ebenfalls eine unvariierter Bewegung.

Da ferner für die Zeiten  $t_0$  und  $t_1$  die Anfangsbedingungen verschwinden, so wird die Bewegung jeder Punkt zur Zeit  $t_0$  von der unvariierter Bewegung ausgehen wie bei der unvariierter Bewegung. Wieder zur Zeit  $t_1$  dieselbe Lage erreichen wie bei der unvariierter Bewegung. Es kann sein, daß die Bewegung bloß dadurch aus der unvariierter Bewegung hervorgeht, daß die Anfangsbedingungen entsprechend



diese Zusatzkräfte, sondern die Bewegung vielmehr bloß als variirte, also neben die

Wir vergleichen jetzt die Bewegung zu einer beliebigen Zeit mit einer variirten Bewegung mit einer unvariirten Bewegung, welcher bei  $t$  und nennen die Zustände  $t$  spondierende. Wir setzen das Zeichen  $\delta$ , um den Zuwachs der Größe erfährt, wenn man über die unvariirten Bewegung über den Zustand der variirten Bewegung gegenwärtigen Betrachtung über ist. Das Zeichen  $d$  das die Bewegung welcher bei der unvariirten Bewegung  $dt$  wächst, wobei wieder nicht die Rede ist.

Die Kraftkomponenten sind als Funktion  $V$  (sobald eine Bedingungsgleichungen  $\delta V = 0$  sollen für die variirte

bestand der für die unvariierte Bewegung gesetzte bei derjenigen Konfiguration der Kräfte wirksam wären, die diesen bei der zukünftigen, während die Kräfte, welche wir genannt haben, eine neue hinzukommende Kraftfunktion haben.

Da für die variierte Bewegung zu jedem Zeitpunkt der erste materielle Punkt die Abszissenkomponente

$$x_1 + \delta x_1 = x_1 + t f_1$$

hat, so ist bei der variierten Bewegung die Abszissenkomponente in der Abszissenrichtung

$$12) \quad \frac{d}{dt}(x_1 + \delta x_1) = \frac{dx_1}{dt} + f_1$$

Unserer Übereinkunft gemäß bezeichnen wir den Zuwachs, den eine beliebige Funktion  $\delta$  im Verlauf von einem Zustande der unvariierten Bewegung zu einem entsprechenden Zustande der variierten Bewegung durch ein vorgesetztes  $\delta$ . Da wir die Geschwindigkeit des ersten materiellen Punktes der unvariierten Bewegung mit  $x_1'$  bezeichnet haben,

15)

$$\delta T = \sum_k \int_{t_0}^{t_1} m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} \delta x_k dt$$

Wir können nun in der Summe einzeln nach  $t$  integrieren und schreiben:

$$16) \quad \sum_k \int_{t_0}^{t_1} m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} \delta x_k dt$$

Jedes einzelne Glied der ersten Summe kann man schreiben:

$$\int_{t_0}^{t_1} m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} \delta x_k dt$$

Integrieren wir partiell nach  $t$ , so erhalten wir:

$$\left[ m_k \frac{dx_k}{dt} \delta x_k \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} m_k \frac{dx_k}{dt} \frac{d\delta x_k}{dt} dt$$

Das erste Glied dieses Ausdrucks ist Null, vorausgesetzt haben, daß  $\delta x_k = 0$  für  $t = t_1$  sämtliche  $\delta x_k$  verschwinden. Es verbleibt also nur das zweite Glied, welches sich bei Einführung der

Der Ausdruck  $\sum_1^{3n} X_k \delta x_k$  der Po

Arbeit dar, welche gegen die expliziten  
sobald das System aus der wirklichen  
Zeit  $t$  hat, in die korrespondierende,  
entsprechende variierte Lage gebracht  
§§ 16 und 26). Wenn eine Kraftfunktion  
übrigens auch noch die Zeit explizit en  
 $X_k = - \partial V / \partial x_k$ , daher nach Gleichung

$$18) \quad \sum_1^{3n} X_k \delta x_k = - \delta V,$$

wobei  $-\delta V$  die gesamte Veränderung d  
Übergang von der wirklichen zur variierten  
Konstanthaltung der Zeit  $t$  ist. Existiert  
oder sind die Kräfte überhaupt nicht h  
der Zeit und der Koordinaten gegeben,  
immer symbolisch

$$19) \quad \sum_1^{3n} X_k \delta x_k = - \delta V$$

als Funktionen der Koordinaten, so ist ein Strich zu setzen.

#### § 4. Begriff der verallgemeinerten

Die im vorigen Paragraphen gegebene Form des Prinzipes der statischen Systeme ist als besonders nützlich bei der Behandlung der Verallgemeinerung. Wir haben bisher die Position eines Systems durch dessen rechtwinklige Koordinaten bestimmt. Sehr oft empfiehlt es sich, die Position einzuführen, welche ebenfalls durch die Koordinaten jedes Punktes des Systems zu bestimmen ist. kann z. B. die Position jedes Punktes des Systems Semipolar- oder elliptische Koordinaten bestimmen. Wenn zwischen den materiellen Punkten des Systems so genügen oft wenige Variablen, um die Position sämtlicher materieller Punkte zu bestimmen, wie wir im I. Teile ersahen, die Position eines starren Körpers im Raume zu bestimmen werden. Zur Bestimmung

häufig folgendermaßen bewerkstelligt. Man ersetzt die rechtwinkligen Koordinaten durch  $3n + 1$  verallgemeinerte und wählt letztere so, daß einige derselben die Bedingungsgleichungen für alle Zeiten erfüllen, andere daher nicht den Charakter von Koordinaten, sondern reinen Konstanten der Aufgabe haben, andere als veränderliche Koordinaten überlassen. So z. B. ein materieller Punkt gezwungen, auf einer Kugelfläche zu bewegen, so drückt man die rechtwinkligen Koordinaten durch gewöhnliche Polarkoordinaten aus, deren Ursprung der Mittelpunkt der Kugel ist. Eine der Polarkoordinaten, nämlich die Entfernung vom Kugelzentrum, ist dann konstant und man drückt den Polwinkel als veränderliche Koordinate aus.

Es sei nun ein beliebiges System von  $n$  Punkten gegeben; die rechtwinkligen Koordinaten sollen wieder mit  $x_1, x_2, \dots, x_{3n}$  bezeichnet werden, alle übrigen bisherigen Bezeichnungen bleiben unverändert. Ferner seien  $p_1, p_2, \dots, p_s$  irgendwelche Variable, durch deren Werte ebenfalls die Lage der materieller Punkte des Systems bestimmt werden sollen, die  $\alpha$  die verallgemeinerten Koordinaten

Der einfachste und wird der sein, daß die winkligen Koordinaten durch die Zeit nicht explizit e Zeiten dieselbe Form hab rechtwinklige Koordinaten drückt. Wir bezeichnen d als skleronome.

Die Funktionen  $F'$  kön änderliche Parameter enth Zeit kontinuierlich veränd enthalten die Zeit explizit man unter dem Funktions Variable  $t$  explizit beifügt naten). Letzterer Umstand Einführung der betreffen Bedingungsgleichungen eli explizit enthielten.

Am einfachsten und

zeichnen wir die letzteren als  
nahme von §§ 27 und 28 is  
Mechanik immer vorausgesetzt

wenn die Funktionen  $H'$  der Gleichungen kontinuierlich sind, da dann die Position der generalisierten Koordinaten eindeutig läßt sich manchmal die Einführung mehrerer nicht vermeiden. Man kommt dann über der generalisierten Koordinaten mit bestgewählten beginnen und sich dann stets der Zeit ändern sollen. Da auch die winkligen Koordinaten sich stets kontinuierlich ändern, so ist dadurch jede Mehrdeutigkeit solange man nicht an eine Stelle kommt Funktionswerte verzweigen. An solchen oder anderen singulären Stellen, wo die kontinuierlich, unbestimmt oder unendlich immer besondere Betrachtungen resp. Setzungen notwendig, während an allen zu entwickelnden Gleichungen richtig bleibt.

Wenn zwischen den generalisierten Gleichungen bestehen, so können natürlich mittels derselben in verschiedene Formen indem man die eine oder andere gener



wobei natürlich die Funktionen in beliebigen Formen gebracht werden können. In den rechtwinkligen Koordinaten  $\Phi$  können mehrdeutige Stellen haben, für welche die verwickelnden Gleichungen aufzulösen erforderlich sind.

Es hätte keine Schwierigkeiten 22) in die ersten und zweiten Ableitungen der  $x$  nach der Zeit, sowie die  $p$  statt der  $x$  einzuführen, in die für die rechtwinkligen Bewegungsgleichungen würde die Form liefern, welche die Einführung der verallgemeinerten Koordinaten

Wir wollen aber im folgenden viel kürzer und ganz allgemein die stationären Wirkung gefunden

Zustand der unvariieren mit dem der  
sprechenden Zustande der variierten  
gleich. Infolgedessen muß bei Bildu  
als unveränderlich angesehen werden,  
während der Zeit  $dt$  bei der unvari  
tretenden Zuwachs von  $x_k$  die Formel

$$27) \quad dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial t} dt + \sum_1^n \frac{\partial x_k}{\partial p} dp$$

Die Koeffizienten der  $\delta p$  in Formel  
Ableitungen der Funktionen  $P$  nach de  
Funktionen der  $p$  und eventuell der  $z$   
bestimmten Werten der  $x$  und  $p$  aus  
den singulären Stellen die  $\delta x$  eindeu  
stimmt und umgekehrt, da nirgends  
zweigungspunkten ein zu gewissen  $p$   
der  $x$  kontinuierlich in ein anderes  
gehen kann.

Substituiert man die Werte 26)  
für die bei der fingierten Verschiebung  
des Systems, so nimmt dieser die For

dieser beiden Zeiten verschwinden, daß, wenn sämtliche  $\delta x$  und  $\delta p$  verschwinden müssen und

Die Größen  $P_h$  spielen früher die Größen  $X_k$ .  $P_h$  sind die verallgemeinerten Kräfte, und  $x_h$  die verallgemeinerten Koordinaten.  $P_h$  ist die Kraft oder auch die Komponente der Gesamtkraft in der Richtung  $x_h$ , nämlich die Koordinatentransformationskraft zu anders gerichteten Koordinaten. Man sieht man leicht, daß  $P_h$  im allgemeinen die Komponente der auf ein Teilchen wirkenden Kraft in der Richtung der betreffenden Koordinate ist.

—  $\delta'' V$  ist die bei einer virtuellen Bewegung geleistete Arbeit. Wollte man die unvariierte Bewegung

$$\sum_{k=1}^{3n}$$

berechnen, so wären natürlich

$$30 a) \quad X_k = - \frac{\partial V}{\partial x_k} \quad k = 1, 2, \dots$$

ist, so wird, wie sofort aus Gleichung 22)

$$31) \quad P_h = - \sum_k^n \frac{\partial V}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial p_h} = -$$

Man erhält also dann die nach einer generalisierten Koordinate wirkende generalisierte Kraft  $P_h$  in der Kraftfunktion die rechtwinkligen Kräfte  $X_k$  der Gleichungen 22) durch die generalisierten Kräfte ausdrückt, die so erhaltene Funktion  $V$  nach den Koordinaten und der Zeit nach der generalisierten Koordinate partiell differenziert. Das Vorzeichen umkehrt.

Wenn zwischen den  $p$  keine Gleichungen bestehen, so kann man die nach  $p_h$  wirkende verallgemeinerte Kraft unabhängig von den rechtwinkligen Kräften  $X_k$  Komponenten der äußeren Kräfte nach den rechtwinkligen Koordinatenachsen in der Kraftfunktion definieren. Man läßt  $p_h$  um  $\delta p_h$  wachsen, aber konstant, sowie auch die Zeit, insoweit es sich um die äußeren Kräfte handelt, konstant.

Wenn aber die  $X$ , so vorkommenden Funktionen keine Eliminationen mittels nimmt, so sind die Ausdrücke Werthe, welche die Formeln wenn man ohne Rücksicht auf alle  $p$  bis auf  $p_h$  konstant die dazu gehörigen Änderungen und mittels der Formeln

Die generalisierten Kräfte die Dimensionen einer Kraft  $P_h \delta p_h$  immer die Dimensionen z. B.  $P_h$  die Dimension einer Kraft (einer Arbeit, eines Winkels, also eine bloße Zahl

**§ 6. Generalisierte Geschwindigkeit und generalisiertes Moment. Ein**

Wir wollen nun den beliebigen Größe nach der Zeit  $t$  Strich bezeichnen und die

übrigen  $p'$ , aller  $p$  und der Zeit, wenn  $\partial x'_k / \partial p'_h$  enthalten ist, gebildet) ist

$$34) \quad \frac{\partial x'_k}{\partial p'_h} = \frac{\partial x_k}{\partial p_h},$$

also gleich dem aus 22) gebildeten partiellen Quotienten des entsprechenden  $x$  nach  $p$ .

In den rechtwinkligen Koordinaten wird die lebendige Kraft durch Formel 14) gegeben. Setzt man für die  $x'$  die Werte 33), so folgt die lebendige Kraft zweiten Grades der  $p'$ . Wir wollen sie

$$35) \quad \left\{ \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_1^n \sum_1^n a_{hk} p'_h p'_k + \sum_1^n \beta_h p'_h \\ &= \frac{1}{2} a_{11} p_1'^2 + \frac{1}{2} a_{22} p_2'^2 \dots + a_{12} p_1' p_2' \\ &\quad + \beta_1 p_1' + \beta_2 p_2' \dots + \gamma, \end{aligned} \right.$$

wobei wir unter  $a_{hk}$  und  $a_{kh}$  stets dieselben Koeffizienten verstehen, die in Formel 14) den halben Koeffizienten von  $p'_h p'_k$  im Ausdruck  $T$  stehen. Die beiden Glieder, welche  $p'_h p'_k$  enthalten, wenn man in der ersten Summe den Summenindex  $h$  gleich  $k$  und in der zweiten gleich  $k$ , d.

Wenn man den Verlauf folgt, so sind allerdings  $s$  allein und freilich auch die Bewegung begonnen hat, Systeme und gegebenen  $A$  gegeben ist, dadurch im all sind, entweder eindeutig od unendlich vieldeutig, selbst lich zwischen gewissen Gr von Werten annehmen könn Differentialquotienten der  $e$

In Formel 36) aber, wi aller partiellen Differentialq berücksichtigt. Es wird für ein Ausdruck betrachtet, d  $p$  und  $p'$  zusammengesetzt Bedeutung der  $p$  und  $p'$  wird, als ob sich jedes der von allen anderen für sich was z. B. dann wirklich d bloß die Zeit, sondern au  $p$  und  $p'$  als beliebig verän

Hierbei ist  $\delta p_h$  der Zuwachs, welcher den generalisierten Koordinaten  $p_h$  beim Übergang von der Zeit  $t$  entsprechenden Zustande der unvariierenden Zustände der variirten Zustände  $p_h' = \frac{d p_h}{d t}$  ist der Wert der entsprechenden Geschwindigkeit zu dieser Zeit für die un-

$$\frac{d p_h}{d t} + \frac{d \delta p_h}{d t} = p_h' + \delta p_h'$$

der für den korrespondierenden Zustande der Bewegung. Der Zuwachs, den diese Geschwindigkeit beim Übergang von der unvariierenden Bewegung erfährt, ist also:

$$39) \quad \delta p_h' = \frac{d \delta p_h}{d t}.$$

Addiert man zur Gleichung 38) beider

$$\sum_h^s P_h \delta p_h,$$

multipliziert mit  $d t$  und integriert von  $t_0$  bis

$$\left( \int_{t_0}^{t_1} \left( \delta T + \sum_h^s P_h \delta p_h \right) d t = \right.$$



$$41) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left( \delta T + \sum_1^s P_h \right) \\ & = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_1^s \left[ - \frac{d}{dt} \right] \end{aligned} \right.$$

Die Gültigkeit dieser Bedingung geknüpft, daß für  $t = t_0$  und  $t = t_1$ , die  $V$  verschwinden. Wenn dies für  $t = t_0$  und  $t = t_1$  sämtlich schwindet das letzte Glied. Andererseits aber verschwindet die linke Seite dieser Gleichung, es folgt somit in diesem

$$42) \quad \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^s \left( - \frac{d q_h}{dt} \right)$$

Die Zahl  $s$  der generalisierten Koordinaten muß kleiner sein, als die Zahl  $i = 3n - \tau$  der Bedingungsgleichungen des Systems, weil sonst eine Bestimmung der Punkte des Systems durch die generalisierten Koordinaten unmöglich wäre. Ist  $s = i$ , so tritt der Fall ein, daß zwischen den generalisierten Koordinaten keinerlei Bedingungsgleichungen bestehen können, wenn das System selbst ein holonomes ist. Ist  $s > i$ , so bleiben zwischen den generalisierten Koordinaten noch  $\sigma = s - i = s - 3n + \tau$  Bedingungsgleichungen übrig.

Beim Gebrauche rechtwinkliger Koordinaten nimmt die  $l$ -te Bedingungsgleichung die Form 2). Für die  $l$ -te Gleichung (22) und 27) die generalisierten Koordinaten ein, so nimmt diese Bedingungsgleichung

$$44) \quad \pi^l dt + \sum_{h=1}^s \pi_h^l dp_h = 0$$

wobei

$$\pi_h^l = \frac{\partial \pi^l}{\partial p_h}$$

$$\pi_h^l = \frac{\partial \pi^l}{\partial p_h}$$

$$\pi_h^l = \frac{\partial \pi^l}{\partial p_h}$$

Die  $\pi$  sind natürlich jetzt Koordinaten, welche auch die Letzteres wird jedoch niemals mit  $F$  und  $\xi$  bezeichneten Funktionen enthalten.

Bei der in der Anmerkung Variationsmethode, bei welcher stände nicht gleichen Zeiten die Zeit variiert wird, welche anwenden werden, müßten die Gleichungen treten:

$$46) \quad \pi^l \delta t + \sum_{l=1}^n$$

Falls das System holonom Gleichungen 44) holonom Gleichungen von der Form

$$47) \quad d\varphi(p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

reduzieren lassen. Wenn  $d\varphi$  vom Grade  $g$  ist, so müssen übrig bleiben die sich nicht

einer gegebenen Konstanten, so ist dieser Satz auch umkehrbar, d. h. jedesmal wenn die  $v$  in ihrem Verlaufe den Bedingungen genügen, so ist jeder Übergang von einem Zustande der  $v$  korrespondierenden Zustande der  $x$  variieren genügen. Sind dagegen die Bedingungen bloß gegeben, so könnte im Verlaufe der variirten  $x$  gleich einer Konstanten sein, deren Wert eine unvariirte Bewegung geltenden etwas  $C$  ist. Dann könnte der Verlauf der unvariirten  $x$  den Bedingungen genügen und auch der der  $v$  nicht aber der Übergang von der einen zu der andern ist diese Möglichkeit sofort wieder ausgeschlossen. Die Koordinaten für  $t = t_0$  und  $t = t_1$  nicht variirten.

Die Bedeutung, welche den Variationsbedingungen im zweiten Falle, wenn das System inholonomen sind, wollen wir im nächsten Paragraphen untersuchen. Wir wollen wir zunächst zeigen, wie die Gleichungen zu behandeln ist, wenn beliebige Bedingungsbedingungen  $p$  gegeben sind, deren Anzahl  $\sigma$  sei. Wir setzen, daß jede derselben in die Form 44) gebracht werden

Dies sind die allgemeinen v  
Bewegungsgleichungen in  
eine Kraftfunktion existieren

$$50) \quad \frac{d q_h}{d t} = \frac{\partial (T}{\partial$$

während man in diesem

$$51) \quad q_h$$

wenn  $V$  die Geschwindigkeit

### § 8. Bedeutung der V holon

Wir gehen nun zur  
welche die Variationsb  
Systeme haben. In die  
ein- und dasselbe, ob ma  
oder der Übergang von  
Bewegung solle die Be

Gl. 52. 53.] I. § 8. Bedeutung der Variations

Koordinate  $= p_h + \delta p_h + d p_h + d \delta p_h$ .  
 die Form, welche die Gleichung 44) für  
 annimmt, symbolisch so schreiben:

$$d t \pi^l(p_h + \delta p_h, t) + \sum_1^s (d p_h + d \delta p_h) \cdot \pi_h^l$$

was durch Subtraktion der Gleichung 44)

$$52) \left\{ \begin{aligned} & \delta \left[ \pi^l d t + \sum_1^s \pi_h^{(l)}(p_h, t) d p_h \right] = \sum_1^s \\ & + \sum_1^s \sum_1^s \frac{\partial \pi_h^{(l)}}{\partial p_k} d p_h \delta p_k + \sum_1^s \end{aligned} \right.$$

Gleichung 45) drückt aus, daß die  
 Bedingung für den Übergang  $A$  zur Zeit  $t$   
 Übergang vom ursprünglichen Zustand  
 varierten zur selben Zeit. Die Gleichung  
 drückt, daß dieselbe Bedingung auch zu  
 Übergang  $A$  erfüllt ist, d. h. für den Übergang  
 Zeit  $t + d t$  entsprechenden ursprünglichen

also auch der Übergang  
zum entsprechenden  
Bedingungsgleichung  
daraus noch nicht, ob  
Zustände eine den B  
wegung liefert.

Besonders auffa  
dem variirten Zust  
Zustände etc. übergel  
Bewegung gelangt, v  
lichen Bewegung, we  
schieden ist. Wenn  
Zustände irgend ei  
korrespondierenden Z  
Bewegung den Beding  
doch die Reihenfolge  
zuletzt gelangt ist,  
wegungsgleichungen

Wenn z. B. das  
dingung, daß sie au  
nicht holonome, wird  
chung von der For

dem wir bloß sagen, die variierte Bewegung muß ganz unabhängig von der unvariierten Bewegung den Bedingungsgleichungen genügen. Die Bedingungen der Variationsrechnung für nicht holonomen Systemen die variierte Bewegung genügen muß, scheint ihrer Formulierung nach eine andere zu sein, welchen Zustand der variierten Bewegung mit der Bildung der  $\delta p$  mit einem jeden Zustand der unvariierten Bewegung vergleicht (ihm korrespondierende Bewegung). Wir sagten, die variierte Bewegung muß so gewählt werden, daß der Übergang von jedem Zustande der unvariierten Bewegung zu dem korrespondierenden Zustande der variierten Bewegung den Bedingungsgleichungen genügt. Das ist im Grunde kurz die Höldersche Art der Variation.

Es kann also die Frage aufgeworfen werden, ob diese bestimmte, dieser Bedingung genügende Bewegung nicht aufhört, ihr zu genügen, wenn man sie verändert, als daß man mit jedem Zustande der unvariierten Bewegung nicht denselben Zustand der variierten Bewegung wie früher, sondern einen zu einer anderen, zu einer verschiedenen Zeit gehörigen Zustand der variierten Bewegung korrespondieren läßt. Es muß dann, wenn man



der variierten Bewegung  
 stande  $A$  der unvari  
 $t + \delta t$  gehörigen Zus  
 korrespondiert, so m  
 Variation irgend eine  
 wachs sein, welchen  
 Bewegung beim Überg  
 also bei der natürlic  
 erfährt, so daß  $dp =$   
 und da die Bedingun  
 so müssen ihnen auc  
 genügen. Denn die  $d$   
 lichen, also einer jeden

### § 9. Zweite Form

Wir können die  
 bringen, wenn wir sta  
 keiten  $p'$  die Moment  
 den Fall beschränke  
 Gleichungen 22) die  
 die mit  $\beta$  und  $\gamma$  be  
 für  $T$  verschwinden (c

Gl. 55-57.] I. § 9. Lagranges Gleich. Zweite

ist wegen  $a_{hk} = a_{kh}$  ebenfalls für  $b_{hk}$  dies  
woraus folgt:

$$55) \quad b_{hk} = b_{kh}.$$

Die Auflösung der linearen Gleichungen  
wäre nur dann unmöglich, wenn die Det

$$56) \quad \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \dots a_{1s} \\ a_{12}, a_{22} \dots a_{2s} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{1s}, a_{2s}, \dots a_{ss} \end{vmatrix}$$

verschwinden würde. Dies kann aber ni

Werte eintreten.  $T$  ist nämlich gleich  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} x_i^2$

Summe von Quadraten mit positiven Koeffi

also nur verschwinden, wenn alle  $x'$  und  $\alpha$

verschwinden. Das Verschwinden der Det

aber die Bedingung, daß die linearen Gleich

welche man erhält, wenn man alle  $q$  gleich

andere Auflösung als das Verschwinden s

lassen. Würde also diese Determinante 56)

würden aus den Gleichungen 36) immer ge

als Funktion von den  
 es sind bei der Differ  
 konstant zu betrachte  
 möge der Gleichunge  
 ausdrücken. Dann erl  
 ausgedrückt. Weil  
 der  $p'$  war, diese aber  
 der  $q$  sind, so wird  
 Funktion der  $q$  ersch

$$58) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^s \sum_{k=1}^s c_{hk} q_k$$

Die Koeffizienten  $c$  s  
 es ist identisch  $c_{hk} =$

Den aus diesem  
 rentalquotienten von  
 anderen  $p$  nicht die  $p$   
 trachten sind, wollen

bezeichnen. Wir wer  
 als Funktion von  $p$

Differentialquotienten von  $T$  nach  $q_h$  bilden erst  $T$  als Funktion von  $p$  und  $p'$  ausdrückend die  $p'$  durch die Gleichungen 54) durch  $p$  und  $q$  aus, wo dann bei Bildung der  $\partial p' / \partial q$  die anderen  $p'$  als konstant zu betrachten sind. Es wird

$$60) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_h} &= \sum_1^s \frac{\partial T}{\partial p'_k} \frac{\partial p'_k}{\partial q_h} = \sum_1^s q_k \frac{\partial T}{\partial q_k} \\ &= \sum_1^s q_k b_{hk} \end{aligned} \right.$$

Andererseits folgt aus Gleichung 58):

$$61) \quad \frac{\partial T}{\partial q_h} = \sum_1^s c_{hk} q_k.$$

Da dies nach Gleichung 60) gleich dem durch die gegebenen Werte von  $p'_h$  sein muß, und da die  $q$  unabhängig voneinander alle möglichen Werte haben können, und 61) alle Koeffizienten der  $q$  gleich sein müssen, allgemein:

$$2 \frac{\partial q}{\partial}$$

was mit 59) zusammen

$$63) \quad \frac{\partial}{\partial}$$

Wenn wir 57) genau soeben nach  $p_h$  differenzieren, so müssen wir alle übrigen  $p'$  durch die Summe rechts in 57) ersetzen, nach  $q_h$  differenziert li

während in allen anderen  $q$  als konstant, hierauf erhält man aus

$$2 \frac{\partial T}{\partial q_h} = p$$

was mit Gleichung 60)

Gl. 67-72.] I. § 9. Lagranges Gleich. Zweit

und

$$67) \quad \frac{dq_h}{dt} = P_h - \frac{\partial_q T}{\partial p_h} + \sum_1^{\sigma} \lambda_l$$

Natürlich wird man die Indizes des  $\partial$  we  
ein für allemal ausgemacht hat, welche pa  
quotienten man meint.

Wenn die Kräfte eine Kraftfunktion h  
Koordinaten, eventuell noch die Zeit enth  
sich die Gleichung 67) in:

$$68) \quad \frac{dq_h}{dt} = - \frac{\partial V}{\partial p_h} - \frac{\partial_q T}{\partial p_h} + \sum_1^{\sigma} \lambda_l$$

Da aber  $V$  die  $q$  nicht enthält, so kan  
chung 68) auch so schreiben:

$$69) \quad \frac{dq_h}{dt} + \frac{\partial_q (T + V)}{\partial p_h} = \sum_1^{\sigma} \lambda_l$$

Setzt man nun

$$70) \quad E = T + V,$$

Setzt man analog

73)

so erhalten die Gleichung  
nämlich:

$$74) \quad \frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial_{p'} H}{\partial p_h} +$$

wobei natürlich wieder  
zwischen den  $p$  keine Be

## § 10. Ableitung der Lag der Va

Wir wollen noch zwei  
Gleichungen ohne den U  
Variationen gewinnen kan  
sierten Koordinaten jetzt  
sein können. Die allgeme  
Koordinaten können wir  
§ 43 in der Form schreib

Gl. 77.] I. § 10. Ableitung der Lagrangeschen

generalisierten Koordinaten die betr. identisch erfüllen. Nun ist identisch:

$$77) \quad \frac{d^2 x_k}{d t^2} \frac{\partial x_k}{\partial p_h} = \frac{d}{d t} \left[ x'_k \frac{\partial x_k}{\partial p_h} \right] - x'_k$$

Im zweiten Faktor des letzten Gliedes h. u. die Reihenfolge der Differentiation vertauschen. D.

$$\frac{d}{d t} \frac{\partial x_k}{\partial p_h} = \sum_1^s \frac{\partial^2 x_k}{\partial p_h \partial p_l} p'_l + \frac{\partial^2 x_k}{\partial p_h \partial t}$$

$$x'_k = \sum_1^s \frac{\partial x_k}{\partial p_l} p'_l + \frac{\partial x_k}{\partial t}$$

daher

$$\frac{\partial x'_k}{\partial p_h} = \sum_1^s \frac{\partial^2 x_k}{\partial p_h \partial p_l} p'_l + \frac{\partial^2 x_k}{\partial p_h \partial t}$$

und

$$\frac{d}{d t} \frac{\partial x_k}{\partial p_h} = \frac{\partial x'_k}{\partial p_h},$$

wo bei der letzten partiellen Differentiation  $p_h$  und alle anderen  $p$  als konstant, also die  $x$  als independent zu betrachten sind. Bei der partiellen Differentialquotienten hatten



Durch Substitution dieser

$$\frac{d q_h}{d t} = \frac{\partial}{\partial t}$$

Wir sind also ohne Rechnung 49) gelangt, wo die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen, welche die Bedingungsgleichung, welche die Koordinaten identisch erfüllen. Wenn also alle Bedingungsgleichungen identisch sind, so verschwinden letzteren keine Bedingungen überhaupt.

$$\frac{d q_h}{d t}$$

was mit Gleichung 43) übereinstimmt.

## § 11. Bewegungsgleichungen

Wir wollen zunächst die Bewegungsgleichungen an einigen

koordinaten annehmen. Wir wollen jedoch die Lagrangeschen Gleichungen gelangen, falls keine anderen Nutzen gewähren, etwas weitläufige Rechnung abkürzen.

Wir suchen zuerst nach 32) die geodetische Länge  $r$  wachse bei konstantem  $\vartheta$  um  $\delta r$ , dann schiebe sich um

$$78) \quad A B = \delta r$$

in der Richtung  $r$ . Ist  $R$  die in dieser Richtung wirkende äußere Kraft, so ist  $-\delta_r'' V = R \delta r$

$$P_1 = \frac{-\delta_r'' V}{\delta r} = R$$

die nach  $r$  wirkende generalisierte Kraft. Wenn  $r$  bei konstantem  $r$  um  $\delta \vartheta$ , so erfährt die Richtung eine schiebung

$$79) \quad A C = r \delta \vartheta$$

senkrecht zu  $r$  in der Richtung der wachsenden  $\vartheta$ . Die Komponente der darauf wirkenden Kraft in dieser Richtung, so ist  $-\delta_\vartheta'' V = \Theta \cdot r \delta \vartheta$

$$P_2 = r \Theta$$

$$82) \quad \frac{\partial T}{\partial p_1} = \frac{\partial T}{\partial r} = m$$

Daher liefern die G

$$\frac{d(m r')}{d t} - m r \vartheta'$$

oder

$$m \frac{d^2 r}{d t^2} - m r \left( \frac{d \vartheta}{d t} \right)^2 = L$$

Wollte man den Gleichu  
man  $T$  durch die  $p$  und

Aus 80) und 81) fol

$$83) \quad T =$$

und daher:

$$\frac{\partial_q T}{\partial r} = -$$

Es sind also die Gleichun  
des Wertes von  $q_2$  wird

$$\frac{\partial_q T}{\partial r}$$

denn die partiellen Diffe

$$X = - \frac{\partial V(x, y, t)}{\partial x}, \quad Y = -$$

dann ist:

$$P_1 = R = - \frac{\partial V(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta, t)}{\partial r} = X$$

$$P_2 = r \Theta = - \frac{\partial V(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta, t)}{\partial \vartheta} = -$$

Bezeichnen wir  $V(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta, t)$  so ist

$$E = T + V = \frac{m r'^2}{2} + \frac{m r^2 \vartheta'^2}{2}$$

die Energie, welche für skleronome Systeme bei der ganzen Bewegung konstant bleibt. Da  $E$  aber von den äußeren Kräften der Masse

$$R dr + r \Theta d\vartheta = - dV +$$

Will man die kanonische Form herleiten, so führt man noch  $q_1$  und  $q_2$  für  $r'$  und  $\vartheta'$  einzuführen.

$$E = \frac{q_1^2}{2m} + \frac{q_2^2}{2m r^2} + V(r, \vartheta)$$

und die kanonische Form der Gleichungen mit  $r, p_2$  mit  $\vartheta$  identisch ist:

$$x = r \cos \vartheta, \quad y =$$

Wächst  $r$  bei konstantem  $\vartheta$ , so verschiebt sich der Punkt um  $\delta r$  in der Richtung von  $r$  nennen wir  $P_1$ . Wächst  $\vartheta$  bei konstantem  $r$ , so verschiebt sich der Punkt um  $r \delta \vartheta$  in der Richtung von  $\varphi$  nennen wir  $P_2$ . Die Kraft  $R$  in der Richtung von  $r$  nennen wir  $P_1$ . Die drei Verschiebungen sind  $\delta r$ ,  $r \delta \vartheta$ ,  $r \sin \vartheta \cdot \delta \varphi$ , daher die

$$P_1 = R, \quad P_2 =$$

Die drei Komponenten der Kraft  $R$  in den drei eben besprochenen Richtungen sind  $R$ ,  $R \sin \vartheta$ ,  $R \cos \vartheta$ . Daher ist

$$\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \left(r \sin \vartheta \frac{d\varphi}{dt}\right)^2}$$

und die lebendige Kraft

$$m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + m \left( r \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 + m \left( r \sin \vartheta \frac{d\varphi}{dt} \right)^2$$

wäre, und zur bloßen Einübung mag Polarkoordinaten Erbrachte genügen.

## § 12. Nochmals Drehung eines starren feste Achse.

Um an einem Beispiele von der zeigen, daß die Lagrangeschen Gleichungen ohne Beziehung auf irgend ein rechtwinkliges Koordinatensystem angewendet werden können, betrachten wir den schon im I. Teile behandelten Fall der Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse.

Wenn sich irgend ein starrer Körper in einer unendlich kleinen Zeit  $dt$  um irgend einen unendlich kleinen Winkel  $d\omega$  dreht, so beschreibt ein materieller Punkt mit der Masse  $m_1$  der Entfernung  $r_1$  von der Drehungsachse einen unendlich kleinen Kreishbogen  $ds$  mit der Geschwindigkeit des materiellen Punktes  $v$

$$v = \frac{ds}{dt} = r_1 \frac{d\omega}{dt}.$$

Die lebendige Kraft desselben ist:

also senkrecht zur Ebene fällt.  $n_1$  sei die gefällte Senkrechte. Die in die Ebene  $E$  fällt, so Die gesamte Arbeit der

$$Q_1 ds \cos(Q_1, ds) =$$

Nun ist aber das E was wir im I. Teile, § züglich der Drehungsachse mit  $M_1$  bezeichnen. S festen Körper wirkende der Drehungsachse, so dieser zweiten Kraft wä den unendlich kleinen

Die gesamte Arbeit Kräfte ist also, wenn wi statt mit  $dw$  bezeichnen

$$85) \quad \delta A =$$

dabei ist  $D_a$  die Summe Kräfte um die Drehung

Es hat nun gar

In der Gleichung 43) ist, weil nur eine coordinate  $p$  vorhanden ist, der Index  $v$  erhält also

$$85a) \quad \frac{d q}{d t} - \frac{\partial T}{\partial p} = P,$$

und nach Substitution der gefundenen  $W$

$$K \frac{d \omega}{d t} = D_a,$$

was mit dem im I. Teile, § 55 Gefundenen

Doch können wir nach dieser Methode die Kräfte finden, welche auf die Lager

Andererseits können wir aber den S Lagrangeschen Gleichungen noch bedeuten Wir denken uns beliebige feste Körper Achsen drehbar, die durch Zahnräder oder (welche auch Masse haben können) so ver ihre Winkelgeschwindigkeiten in konst stehen. Wir können dann den Weg  $p$ , w Punkt einer Galschen Kette oder ein tationsachse liegender Punkt eines rotieren Antriebspunkt, driving-point) zurückgelegt



Wenn der Weg  $p$   
 so ist die gesamte An-  
 Kräfte gleich

wobei im letzten Ausdruck  
 für den Angriffspunkt  
 Komponente in der  
 Angriffspunktes jener Kräfte  
 welche die generalisier-  
 ist also  $\sum_k Q_k a_k$ . M  
 den Antriebspunkt re-  
 Lagrangesche Gleich-  
 daher für unser System

$$\frac{d^2 p}{d t^2} \sum$$

Da der Koeffizient  
 wieder genau die Fo-  
 welche für die Bewegu-  
 in einer geradlinigen

Diese Form tritt  
 liche Teile eines Syst-

## II. Allgemeinste Drehung eines st

---

### § 13. Generalisierte Koordinaten zur Besti eines starren um einen festen Punkt d

Wir gehen nun über zur Bewegung ein  
in welchem ein einziger Punkt  $O$  fest gel  
rend er im übrigen vollkommen frei ist  
außen beliebige Kräfte wirken. Es hand  
darum, verallgemeinerte Koordinaten, d.  
zuführen, durch welche die Lage des f  
Raume zu einer beliebigen Zeit  $t$  eindeut

Zu diesem Zwecke wählen wir den  
Punkt  $O$  zum Ursprunge zweier verschied  
Koordinatensysteme. Die Lage der Achs  
des einen (des fixen) Koordinatensystems  
unveränderlich sein. Die Achsen  $O\xi$ ,  $O\eta$   
(des beweglichen) Koordinatensystems solle  
fest mit dem Körper verbunden sein, so

Uhrzeigers oder im entgegen-  
gesetzten Sinne. Im ersten  
Falle nehmen wir an, daß  
Immer ist also die  
Abszissenachse auf k  
tiven  $y$ -Achse überge  
tive  $x$ -Achse.

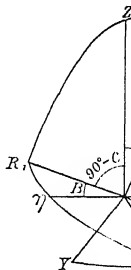
Zu irgend einer  
im Raume bestimmt  
lichen Koordinatensys  
diese relative Lage ei  
die Lage des festen K

Um solche Winke  
maßen. Wir bezeichne  
die Durchschnittslinie  
durch den Punkt  $O$  g  
anfang kann man jede  
 $OR$  bezeichnen. Für  
bestimmt, welche der  
daß die Lage dieser  
der Zeit verändern soll;  
während einer unendli  
gegensetzte Richtung

in diesem Sinne fort erteilen muß, bis sie übergeht, sei eben der Winkel  $A$ . Bleibt  $A$  positiv und erhält  $A$  einen positiven Zuwachs, so ist die Drehung in positivem Sinne um  $OZ$ .

Der Winkel zwischen der fixen und beweglichen Ebene und zwar von der ersteren im positiven Sinne um die Achse  $OR$  gegen die letzte gezählt, heißt  $C$ . Ist  $C$  festem  $OZ$  und wachsendem  $C$  die Achse  $OR$  eine Drehung um  $OR$  macht.  $C$  ist daher auch der Winkel zwischen beiden  $XY$ -Ebenen, und zwar derjenigen, welche  $OR$  durch eine kleine positive Drehung um  $OZ$  resp.  $O\xi$  gelangt.

Da  $A$  deren Durchschnittsline,  $C$  deren Neigung bestimmt, so bestimmen beide Winkel  $A$  und  $C$  die Lage der  $\xi\eta$ -Ebene relativ gegen das fixe Koordinatensystem, also auch im Raume eindeutig, wodurch auch die Lage von  $O\xi$  eindeutig



die Werte dieser  
ist umgekehrt die  
des Körpers ein

Diese drei W  
Koordinaten unse  
wollen setzen:

$$p_1 =$$

Um die Lage  
können wir uns o  
nischen Aufhänge  
Ringen liege der e  
im ersten um die  
blicklich in der Eb  
die Achse  $OR$  dreh  
 $RO\zeta$ . Dieser trag  
baren Körper, in o  
bundene zu  $O\zeta$  sen  
 $O\xi$  habe.

#### § 14. Generalisierte Körper

Ehe wir an die

andere um die Achse  $OR_1$ , welche  $O\xi$  der Ebene der beiden  $Z$ -Achsen mit der  $O\eta$  selbst steht natürlich senkrecht auf  $O\xi$  mit  $O\eta$  denselben Winkel  $B$  bilden, den  $O\xi$  und wir wollen sie in dem Sinne ziehen, von  $O\eta$  gegen  $OR_1$  gezählt gleich  $B$ , verschieden ist.

$\xi R \eta R_1$  und  $R_1 Z \zeta$  sind in der Fig. Kreise, in denen einerseits die  $\xi \eta$ -Ebene der beiden  $Z$ -Achsen die Kugel

Wir wollen noch den Kosinus in  $\cos$  mit dem entsprechenden kleinen lateinischen  $c$  dem entsprechenden kleinen griechischen  $\kappa$  zeichnen, also setzen:

86)  $\cos B = b, \quad \sin B = \beta, \quad \cos C =$

Dann ist  $c \delta A$  die Komponente der  $D$  Achse  $O\xi$ , und  $\gamma \delta A$  die Komponente  $O\eta$ . Letztere kann wieder in zwei Komponenten  $O\xi$  und  $O\eta$  zerlegt werden. Da die  $D$  den Winkel  $90^\circ + B$  bildet, so sind

„um oder bezüglich so  
zusammenfallen, die  
 $O\xi$ ,  $O\eta$ ,  $O\zeta$  haben“  
Betrachtungen in der  
jeder Winkeländerung  
welche zusammen jen

$$87) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{O\xi} \\ \overline{O\eta} \\ \overline{O\zeta} \end{array} \right.$$

Wir wollen nun  
finden. Da die Winkel  
Koordinaten spielen,  
indem wir gleichzeitig  
lassen und die bei der  
welche wir die Lage  
Arbeit  $-\delta'' V$  auf die  
Die Koeffizienten der  
ordinaten sind dann  
unendlich kleine Dr  
Lageänderung  $K$  auf

Gl. 88-91.] II. § 15. Lebendige Kraft der

selbe gilt für die Achsen  $O\eta$  und  $O\zeta$ . Die gesamte Arbeit, welche bei der Summe unendlich kleiner Bewegungen geleistet wird, ist der Summe der bei diesen Bewegungen verrichteten Arbeiten ist, so ist die gesamte mit  $-\delta V$  gleich:

$$D(-\beta \gamma \delta A + b \delta C) + E(b \gamma \delta A + \beta \delta B) + F(c \delta A + a \delta B + b \delta C)$$

Setzt man den Koeffizienten von  $\delta A$  gleich  $P_1$ , den von  $\delta B$  gleich  $P_2$ , den von  $\delta C$  gleich  $P_3$ , so erhält man:

$$88) \quad P_1 = -\beta \gamma D + b \gamma E + c F, \quad P_2 = -\beta \delta D + a \delta E + b \delta F,$$

## § 15. Lebendige Kraft eines starren Körpers, der um einen festen Punkt dreht.

Wir wollen nun weiter den Wert der lebendigen Kraft  $T$  des Körpers zu einem bestimmten Zeitpunkte bestimmen. Wir lassen zu diesem Zwecke eine kleine Zeit  $dt$  vergehen und bezeichnen mit  $d\alpha$ ,  $d\beta$ ,  $d\gamma$  die wirklichen Zuwächse dieser drei Winkel. Das Schema 87) gilt für beliebige unendlich kleine Bewegungen.



( $\Omega, \zeta$ ) bezeichnet werden  
 drehung  $d\omega$  auf die Achs  
 Gesetzen über die Zusam  
 Vektor, dessen Projektione  
 $O\xi, O\eta, O\zeta$  gleich  $d\varphi, d\eta, d\zeta$   
 92)  $d\varphi = d\omega \cos(\Omega\xi), \quad d\eta = d\omega \sin(\Omega\xi) \sin(\Omega\eta), \quad d\zeta = d\omega \sin(\Omega\xi) \cos(\Omega\eta)$

Die Achse  $\Omega$  heißt die  
 weil die ganze Lagenände  
 der Zeit  $dt$  durch eine e  
 erzeugt werden kann. Wi  
 unendlich kleinen Zeit  $dt$   
 während derselben eintritt,  
 keit. Es ist also  $d\omega/dt$   
 jener Drehung um die Ac  
 änderung des Körpers wä  
 Wir nennen sie die Gesam  
 die augenblickliche Winkel

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cos(\Omega, \xi)$$

und

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \sin(\Omega, \xi)$$

heitsmomentes des Körpers bezüglich die Quadrat der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit des Körpers ist. Daher ist die lebendige Kraft  $T = \frac{1}{2} K \omega^2$ , wobei  $K$  dessen Trägheitsmoment bezüglich der Geraden  $\Omega$ , also der augenblicklichen Drehungsachse ist.

Es seien  $\xi, \eta, \zeta$  die Koordinaten irgendeines Massenteilchens  $m$  des Körpers bezüglich der Koordinatenachsen. Ferner sei

$$G = \sum m (\eta^2 + \zeta^2), \quad H = \sum m (\xi^2 + \zeta^2), \\ G' = \sum m \eta \zeta, \quad H' = \sum m \xi \zeta, \quad J' = \sum m \xi \eta,$$

wobei die Summen über alle Massenteilchen des Körpers erstrecken sind. Da die beweglichen Koordinatenachsen mit dem Körper verbunden sind, so sind diese sechs Größen während der ganzen Bewegung konstant.

$G, H$  und  $J$  sind die Trägheitsmomente des Körpers bezüglich der drei beweglichen Koordinatenachsen.  $G', H', J'$  sind dieselben Größen, die wir in § 14 mit  $a, b, c, d, e, f$  bezeichnet haben, während  $\alpha, \beta, \gamma$  bezeichneten Richtungskosinus der Drehungsachse, nach welcher das Trägheitsmoment gesucht wird.

Hätte der Körper keine Winkelgeschwindigkeit, so wäre  $T = \frac{1}{2} G \lambda^2$ . Ebenso wäre die Drehungen um die Achsen  $\frac{1}{2} H \mu^2$  resp.  $\frac{1}{2} J \nu^2$ . Die Summe dieser drei lebendigen Kräfte ist um  $O \xi$  resp.  $O \eta$  und  $O \zeta$  Koordinatenachsen Hauptträgheitsachsen in allen anderen Fällen, wie bei der Superposition mehrerer Bewegungen die Summe der lebendigen Kräfte.

### § 16. Die Euler'schen Gleichungen

Da wir drei verallgemeinerte Koordinaten haben, wir in den Lagrange'schen Gleichungen setzen  $h = 1, 2$  und  $3$ . Wir

$$98) \quad \frac{d q_2}{d t} =$$

behandeln, welche wir erhalten, wenn  $p_2 = B$  ist, so wird:

daher:

$$\frac{\partial T}{\partial p_2} = \frac{\partial T}{\partial B} = -\mu \frac{\partial T}{\partial \lambda} + \lambda \frac{\partial T}{\partial \mu}$$

Die Substitution dieser Werte und die Substitution von  $\lambda$  aus den Gleichungen 88) in Gleichung 98)

$$99) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \nu} \right) = \mu \frac{\partial T}{\partial \lambda} - \lambda \frac{\partial T}{\partial \mu} +$$

Die beiden anderen Bewegungsgleichungen ableiten, indem wir in den Lagrangeschen Gleichungen  $h = 1$  und  $h = 3$  setzen. Wir gelangen jetzt auf eine andere Betrachtungsweise rascher zum Ziel. Die Winkel  $A, B, C$ , welche bezüglich der Koordinatenachsen eine unsymmetrische Lage haben, sind in Gleichung 99) benutzt, sie kommen jedoch selbst gar nicht mehr vor. Dieselbe enthält nur die Größen, welche sich bei zyklischer Vertauschung der Koordinatenachsen selbst zyklisch vertauschen.

Genau so wie wir die Gleichung 99) ableiten, kann man eine andere Gleichung ableiten können, indem man den Winkel der beiden Abszissenachsen mit dem Winkel der  $\eta$ - resp.  $\eta$ -Achse mit der Durchschnittsachse

daher:

$$102) \quad v \frac{\partial T}{\partial \mu} - \mu \frac{\partial T}{\partial v} = \mu v$$

Wählt man die beweise Hauptträgheitsachsen natürlich immer tun wird dagegen sprechen, so wird

$$103) \quad \frac{\partial T}{\partial \lambda} = G \lambda, \quad \frac{\partial T}{\partial \mu} = H \mu$$

und die Gleichungen 99)

$$104) \quad \left\{ \begin{array}{l} G \frac{d\lambda}{dt} = \\ H \frac{d\mu}{dt} = \\ J \frac{dv}{dt} = \end{array} \right.$$

Diese Gleichungen h Sie bestimmen zunächst man hat dann noch A, Gleichungen 94) als Funk durch erst die Bestimmu seiner Lage zu jeder Ze

d. h. wenn die Drehung um eine der drei Achsen stattfindet. Es stimmt dies mit dem § 60 gefundenen Resultate überein, daß, wenn ein Körper um eine unveränderliche Achse rotiert, die Trägheitsachse ist, stets Kräfte auf diese wirken müssen.

2. Wenn alle drei Hauptträgheitsmomente gleich sind, so werden die Gleichungen 104) voneinander unabhängig und jede derselben stimmt mit der Gleichung überein, welche wir für die Drehung um eine feste Achse erhalten haben. Es wird also dann die Drehung um die Koordinatenachsen durch die Drehung um die Hauptachsen nicht beeinflußt (als nur durch jene anderen Drehungen etwa die Momente) bezüglich der ersten Koordinatenachse geändert.

Die Drehung um jede der Koordinatenachsen verläuft also genau so, als ob der Körper nur um eine Achse drehbar wäre und in jedem Zeitmomente ein Drehungsmoment um dieselbe drehend wirkte. Wenn z. B. keine äußeren Kräfte wirken, so geschähe die Drehung um jede der Koordinatenachsen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.

speziellen, sondern im ganz  
behandelten Falle. Irgendein  
Körpers befinde sich zur  
und gelange infolge der I  
tionen dieser beiden Punk  
Zeit  $t$  mit der  $\eta\zeta$ -Ebene  
Dann ist  $A'B' = OA' \cdot \lambda \cdot dt$   
 $OA'B'$  aber ist  $OA'^2 \cdot \lambda \cdot d$   
des I. Teiles das Flächenm  
Achse  $O\xi$  genannt haben,  
der Flächenmomente alle  
züglich der Achse  $O\xi$  is  
leicht, daß durch die Dre  
Flächenmomente nur un  
geändert wird. Ebenso s  
Flächenmomente aller Ma  
der Achsen  $O\eta$  und  $O\zeta$ .

Diesen drei Größen  
des I. Teiles Auseinander  
der drei Winkel proporti  
den drei Koordinatenach  
Summe der Flächenmo

Anfang der Zeit hat, wählen wir als  $O\xi$ -Achse die positive  $O\xi$ -Achse zu Anfang der Zeit im Sinne geschieht. Dann ist für  $t = 0$ ,  $\mu = 0$  daher in den Gleichungen 106)  $\tau = 0$  und auch die Drehung um  $OZ$  im positiven Sinne liegt zu Anfang, und daher immer  $C$  zwischen  $\lambda$  und  $\mu$  und es ist in den Gleichungen 107) die Wurzel mit dem positiven Zeichen zu nehmen.

Die Gleichungen 94) liefern ferner:

$$108) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = i \cos(ht) = -\beta \gamma \frac{dA}{dt}, \quad \mu = i \sin(ht) \\ v = \text{konst.} = c \frac{dA}{dt} - \frac{d\mu}{dt} \end{array} \right.$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen :

$$\frac{dA}{dt} = \pm \frac{i}{\gamma}, \quad B = ht \mp 90^\circ$$

wo die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind. Aus der letzten der Gleichungen 108) folgt

$$v = \pm \frac{ci}{\gamma} - h,$$



Ebene der beiden  $x$ -Achse  
 $O\xi$  enthält, so ist auch A

$O\zeta$  beschreibt eine  
 wobei sich die Ebene der  
 geschwindigkeit  $A' = i/\gamma$   
 Drehung des Körpers um  
 keit  $v$  und gleichzeitig un  
 auf  $O\zeta$  senkrechte Achse  
 entspricht. Die augenblick  
 sich der Körper mit d  
 geschwindigkeit  $\sqrt{v^2 + i^2}$   
 der beiden  $x$ -Achsen, un  
 wenn  $G > J$ , sonst auf  
 $\operatorname{tg}(Z, \zeta) = Gi/Jv$ ,  $\operatorname{tg}(\Omega,$

## § 18. Algebraische Lö Fehlens

Wir gehen nun über  
 das Trägheitsellipsoid ei  
 keine äußeren Kräfte wir  
 daß die Gleichungen 104

ist, da die linke Seite dieser Gleichung lebendige Kraft des Körpers darstellt.

Multipliziert man von den Gleichungen mit  $G\lambda$ , die zweite mit  $H\mu$ , die dritte mit  $J\nu$  wieder, so folgt in derselben Weise

$$111) \quad G^2 \lambda^2 + H^2 \mu^2 + J^2 \nu^2 = h^2,$$

wobei  $h$  eine zweite Integrationskonstante  $G\lambda$ ,  $H\mu$  und  $J\nu$  die Flächenmomente der ge des Körpers bezüglich der Achsen  $O\xi$ ,  $O\eta$  (vergl. § 17, Punkt 3), so ist  $h$  das maximale F des Körpers, also dessen Flächenmoment bez variabeln Achse  $K$  (vergl. I. Teil, § 31), deren den beweglichen Koordinatenachsen durch di

$$112) \quad \begin{cases} \cos(K, \xi) = \frac{1}{h} G\lambda, & \cos(K, \eta) = \frac{1}{h} H\mu \\ \cos(K, \zeta) = \frac{1}{h} J\nu \end{cases}$$

gegeben sind. Ziehen wir sie immer in der das Flächenmoment des Körpers bezüglich der ist, so haben wir  $h$  mit positiven Vorzeichen z die Kosinus der Formel 112) haben dasselb

metrische reduzieren.  
 Paragraphen behandeln  
 zieren sich auch auf  
 also der Abstand  
 schreibenden Ebene  
 ellipsoides gleich der

Wie im allgemeinen  
 Form auf die sogen  
 einfachster Weise  
 auszudrücken sind,  
 Funktionen ausführ  
 weniger eingehen, a  
 elliptischen Funktion  
 vielmehr zur Entwic  
 Theorie übergehen,  
 der Bewegung des in  
 liches Bild zu mach

## § 19. Poins

Weder die Achs  
 gehörige Trägheitse

$$115) \quad \xi = \frac{\varrho \lambda}{\omega}, \quad \eta = \frac{\varrho \mu}{\omega}, \quad \zeta = \frac{\varrho \nu}{\omega},$$

die Koordinaten seines Endpunktes  $\Omega$  auf dem Trägheitsellipsoide liegt, so er die Gleichungen 114). Es ist also:

$$G \left( \frac{\varrho \lambda}{\omega} \right)^2 + H \left( \frac{\varrho \mu}{\omega} \right)^2 + J \left( \frac{\varrho \nu}{\omega} \right)^2 = 1,$$

woraus folgt:

$$116) \quad \omega = k \varrho,$$

$$117) \quad \xi = \frac{\lambda}{k}, \quad \eta = \frac{\mu}{k}, \quad \zeta = \frac{\nu}{k}.$$

Die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit ist in jedem Momente proportional der Länge der Halbmessers des Trägheitsellipsoides, welche die augenblickliche Drehungsachse hat.

Wir wollen noch im Punkte  $\Omega'$  ein Tangentialellipsoid an das Trägheitsellipsoid legen. Die von  $\Omega'$  ausgehende gefällte Normale habe die Länge  $p$  und die Koordinatenachsen die Winkel  $(p, \xi)$ ,  $(p, \eta)$ ,  $(p, \zeta)$ .

Wir machen nun von folgendem Satze der analytischen Geometrie Gebrauch. W

$$a = 1/\sqrt{...}$$

Da  $\Omega'$  der Berüh-  
die Werte 117) ei-

$$118) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = \frac{k}{h}, \end{array} \right.$$

Die erste Formel  
Tangentialebene 2  
Bewegung der Kö  
auch die Richtun  
auch relativ gegen  
lich bleibt. Denn  
invariablen Achse  
 $\cos(p, \zeta)$  gefunden  
wir für die Kosin  
Achse mit den b

Wenn wir d  
nach der Seite  
moment mit posit  
die Strecke  $k/h$   
zur invariablen A

sich zudem unmittelbar vorher diskontinuierlich geändert haben, da sonst der Punkt  $A$  aus dem Innern des ersten herauskommen würde. Die Normalkomponente ist Null, aber der Geschwindigkeitsvektor gegen den ersten Körper eine von Null verschiedene Geschwindigkeitskomponente, deren Richtung die Tangentialebene fällt; dann sagt man, die Körper berühren sich an dieser Stelle aneinander. 3. Auch wenn die Normalkomponente der Geschwindigkeit des Punktes  $A$  gegen den ersten Körper Bewegung des zweiten Körpers gegen den ersten Null ist, so daß dessen Weg bei dieser Relativbewegung einer unendlich kleinen Zeit  $dt$  klein  $dt$  ist, also durch  $dt$  dividiert mit  $dt$  gegen die Grenze Null zueilt; dann sagt man, die Körper berühren sich aneinander.

Die folgende ist eine allgemeinere Konstruktion, von welcher die soeben gegebene ein Spezialfall ist, welche auch den Fall einschließt, daß die Körper an Punkten vorhanden sind, die auch in der Oberfläche liegen können; nur muß man sich dabei aus, daß auf eine endliche Strecke von der Oberfläche oder Spitzen fallen. „Zwischen den

## § 20

Die Bahn des fesselsamen Lagen, die er der sukzessiven Lage ist durch die Gestalt den Wert des Verhältnisses der Winkelgeschwindigkeit multiplizierten Halbmessers zum Endpunkt in der Ebene der Bewegung des Körpers in der Ebene man  $k$  und  $h$  separat einander die Berührungsebene  $T$  stattfindet, auch auf der Ebene der Kurve heißt die Polkurve Poloide hat eine leistungsfähigen zusammenhängenden Teilen. Die geschlossene oder ungeschlossene Figg. 10, 11 etc. des bei der Zentralbewegung

Das letztere Ellipsoid ist also gestreckter von der Kugelgestalt stärker ab als das erste.

Die Durchschnittslinie der beiden Ellipsoide ist die  $z$ -Achse der beiden Poloide. Es mögen beide Ellipsoide um die  $z$ -Achse drehen und zwar sei  $G < H < J$ , so daß also  $G$  die kleinste,  $J$  die größte Halbachse beider Ellipsoide und  $H$  das Trägheitsmoment des Körpers gehört. Die Winkel  $\theta$  und  $\phi$  ändern sich mit der Zeit, ändern aber nicht ihren Wert, wenn sie verändert bleiben und wir studieren verschiedene Fälle desselben, wobei die Anfangslage der Ellipsoide, die Drehungsachse, also das Verhältniß  $h/k$  und die Anfangsgeschwindigkeiten  $\dot{\theta}$  und  $\dot{\phi}$  des Körpers abhängt. Dann bleibt also das Verhältniß  $h/k$  unverändert und auch das zweite Ellipsoid ändert sich selbst und ändert nur seine absolute Größe.

Solange  $h/k < \sqrt{G}$  ist, sind alle Ellipsoide kleiner als die des Trägheitsellipsoids und das zweite Ellipsoid ganz innerhalb des ersten und die betreffenden Werte der Konstanten sind kleiner als die der Konstanten der ersten möglichen Bewegung. Wird  $h/k$  größer als  $\sqrt{G}$ , so ändern sich beide Ellipsoide an den beiden  $x$ - und  $y$ -Achsen. Der Körper dreht sich also mit der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}$  um die  $z$ -Achse des



einem Kegel bewegen, den Winkel mit der Richtung des Trägheitsellipsoides ein

Wächst  $h/k$  noch artige Kurve wieder in jetzt die beiden Pole ellipsoides umgeben und zurückziehen, bis für  $h$  diesen stattfindet, der größten Trägheitsmomente Wert von  $h/k$  entspricht bei der augenblicklichen Achse des größten Trägheitsmoments. Für Werten entspricht kein

Apparate zur Veranschaulichung der Bewegung eines freien Körpers haben konstruiert.

Die eine Hälfte des Körpers ist aus Gips oder Metall modelliert, das sich im Mittelpunkt um drei Richtungen frei drehen

bei der ohne Einfluß von Kräften nach der Mechanik erfolgenden Bewegung des Körpers sein würde.

Legt man durch die Serpoloide einen Kegel, durch die Poloide einen fest mit dem Körper verbundenen Kegel, welche beide durch festen Punkte  $O$  haben, so rollt während der Bewegung letztere Kegel auf dem ersteren.

Man kann auch aus dieser Konstruktion die folgenden Sätze über die Stabilität der Rotation um die Achse größten und kleinsten Trägheitsmoments ableiten. Wenn sich ein Körper anfangs um eine Achse drehte, die mit der Achse des Trägheitsellipsoides einen sehr kleinen Winkel  $p$  (d. h. einen Winkel der klein ist gegen den Winkel der größten Halbachse in die Differenz der größten und kleinsten Halbachse), so ist  $p$  nur wenig kleiner als der Winkel der Achse des Trägheitsellipsoides und alle Winkel, welche erhebliche Winkel mit der Achse bilden, sind kleiner als  $p$ , reichen daher nicht aus. Die Drehung muß also immer um eine

Achse die Ellipsoidfläche  
Serpoloide einer Spirale  
bewegung, die dem Fu  
nahe kommen und sich  
kann und dann wieder  
Drehungsachse entfernt  
lich um endliches von  
ellipsoides. Man sagt,  
andauern, ist aber labil

Falls das Trägheit  
sieht man leicht, wie d  
zu den Resultaten führ  
ableiteten.

## § 21. Allgemeine G schweren Rotations

Wir haben den Fa  
eines um einen festen  
Körpers bezüglich diese  
schon in § 17 ausführlich  
daß keine äußeren Kr

Kräfte um die Achsen  $OR$  und  $OZ$  einführen, aus den rechtwinkligen sphärischen Dreiecken  $\eta RZ$  der Fig. 1, § 13, Seite 53 leicht

$$120) \quad \cos(O\xi, OZ) = -\beta\gamma, \quad \cos(O\eta, OZ) = \beta\gamma$$

(vergl. das später vorkommende Schema) ist also:

$$\mathfrak{C} = Db + E\beta,$$

$$\mathfrak{A} = -D\beta\gamma + Eb\gamma + F\gamma$$

Wir wollen hier für  $D, E, F$ , die Werte für  $\lambda, \mu, \nu$  die Werte 94) und für  $\lambda', \mu', \nu'$  die Werte 95) in die Differentiation nach der Zeit folgenden

$$\lambda' = -\beta\gamma A'' + bC'' - b\gamma A'B' - \beta\gamma A'B'$$

$$\mu' = b\gamma A'' + \beta C'' - \beta\gamma A'B' + b\gamma A'B'$$

$$\nu' = cA'' - B'' - \gamma A'C'$$

substituieren. Es folgt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{C} = G(C'' - c\gamma A'^2) + J\gamma(cA'^2 - B'^2) \\ \mathfrak{A} = \frac{d}{dt}[J(c^2 A' - cB') + G\gamma^2 A'^2] \end{array} \right.$$

Nun ist aber die leb

$$T =$$

Die Substitution der

$$123) \quad T = \frac{G}{2} (2$$

Die Einführung die  
liefert sofort die Gle  
verständlich, warum  
chungen nach der le  
das Moment  $\mathfrak{B}$  (Helm  
punkt am inneren be  
hängung haben, durc  
keit des Körpers un  
die bloße Tatsache,  
mit der Achse des  
Körpers mitbewegen  
ganz der richtige.

Falls das Mome  
äußeren Kräfte zu al  
von den beiden a  
momentes gleich Nu

momente hat, nur eine einzige Kraft licher Größe und Richtung wirkt, deren der durch den Drehpunkt gehenden  $O\zeta$  liegt, der das verschiedene Haupttr spricht. Dieser Fall ist z. B. realisie Schwere auf den Körper wirkt und se  $O\zeta$  liegt.

Wir wählen die unveränderliche zur negativen fixen  $OZ$ -Achse, ziehen Schwere die positive fixe  $OZ$ -Achse ver Ferner wählen wir diejenige Halbachs Angriffspunkt der Kraft  $p$ , also im Fal Schwerpunkt liegt, als positive  $O\zeta$ -Ach dessen Entfernung vom Drehpunkte mit Falle der Schwere  $p$  das Gewicht des Entfernung des Schwerpunktes vom D Kraft  $p$  übt jetzt nur ein Moment  $pl$  Winkel  $C$  zu vergrößern sucht, keines i Winkel  $A$  oder  $B$ . Es ist also:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{C} = pl$$

moment des Körpers be-  
was selbstverständlich ist  
Achse stets das Moment

Dazu kommt noch  
welche wir am einfachen  
Wir multiplizieren die  $C$   
dazu die mit  $A'$  multipli-  
nach  $t$ . Es folgt:

$$G(C' C'' + \gamma^2 A')$$

und daraus durch Integ

$$129) \quad G(C'^2 +$$

wobei  $\chi$  eine neue Inte-  
der Tat nichts anderes  
Kraft ist, erkennt man  
stant ist, reduziert sich  
digen Kraft auf  $\frac{1}{2} G(\lambda^2 +$   
gleich  $\frac{1}{2} G(C'^2 + \gamma^2 A'^2)$   
 $\int p l \gamma dt = - p l c + \text{kon}$

Eliminiert man aus  
Größe  $A'$  so erhält man





Koordinatensystem  $OX$  immer mit der fixen  $xy$ -Ebene soll zu Anfang der Zeit in der festen  $xy$ -Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit  $\frac{J\nu}{2G}$  um die feste  $z$ -Achse drehen, also so, wie man auf der  $xy$ -Ebene zur positiven  $x$ -Achse  $OX$   $OX'$  sollen also zur Zeit  $t$  einen Winkel  $\vartheta$  einschließen. Zur selben Zeit soll die Gerade  $OR$  und  $OX'$

$\neq OR$

Wir führen lieber den Winkel  $\vartheta$  zwischen der Ebene, die die Pendelmasse schneidet, und der  $xy$ -Ebene also den Winkel  $\vartheta$  zwischen der Ebene also den Winkel  $\vartheta$  zwischen der  $xy$ -Achse begrenzten Ebene und der Ebene, die eine die Achse  $z$  enthält. Da die erste Ebene  $OR$  steht, so ist:

$$132) \quad \vartheta = (\neq OR, OX)$$

der Erde wäre, wie die eines am Pole acaultschen Pendels relativ gegen die Erde. den Pendel müssen noch die schon in den Paragraphen hervorgehobenen Bedingungen die Verbindungslinie vom Drehpunkt zur Hauptträgheitsachse ist und daß die Trägheitsachse zugleich aller durch den Drehpunkt senkrecht zur Verbindungslinie (der Pendelachse) gezogener

Die Pendelachse des nicht rotierenden Pendels kann sich natürlich, je nach den Werten der Integrationskonstanten, absolut im Raume in einer Ebene, einer Kugel, einem Kreiskegel bewegen.

Dieselbe Bewegung macht nach der Theorie des Lichtes ein Ätherteilchen, wenn es elliptisch oder zirkular polarisiertes Licht fortpflanzt, der die Polarisationssebene durchläuft ja dieselben Bewegungsphasen, welche die verschiedenen Ätherteilchen der alten Undulationstheorie gleichzeitig durchläuft. erklärt man die elektromagnetische Drift der Polarisationssebene des Lichtes oft durch die

eines Kreisel's nennt, schwerer Rotationskörper Rotationsachse  $O\zeta$  dreht in Richtung aufgesetzt; die den Punkt  $O$  der Achse

$\frac{1}{2}Jv^2$  ist die Energie, die die Achse  $O\zeta$ , welche konstant bleibt.

$$E = \frac{G}{2} \gamma^2$$

ist die übrige Energie desselben in seiner Gleichgewichtslage. Der Energiennullpunkt gewählt, ist natürlich ebenfalls konstant. Für  $C$  nahe gleich  $180^\circ$  sei die Bedingung, daß der Körper aufgesetzt wird, präzisiert und daher immer klein.

Da im Ausdrucke positiv sind, so muß um klein gegenüber  $\frac{1}{2}Jv^2$  sein, nicht sehr groß gegen

aus den Gleichungen 94) abgeleiteten Wert  $dp/dt$  in die beiden ersten der Gleichungen

$$\begin{aligned} -b \gamma G A' B' &= (G - J) v b \gamma A' + \\ -\beta \gamma G A' B' &= (G - J) v \beta \gamma A' + \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen sind identisch. Der ersten mit  $b \gamma$  oder der zweiten mit  $\beta \gamma$  multipliziert (s. 124):

$$134) \quad G c A'^2 - J v A' + p l = 0$$

$$135) \quad A' = \frac{J v \pm \sqrt{J^2 v^2 - 4 G c p l}}{2 G c}$$

Sei zuerst  $C$  gleich  $180^\circ - \varepsilon$ , wobei  $\varepsilon$

$$A' = \frac{-J v \pm \sqrt{J^2 v^2 + 4 G p l c}}{2 G \cos \varepsilon}$$

Für  $v = 0$  entspricht dies einem sogenannten Kreispendel, d. h. einem Pendel, dessen Schwerpunkt sich in einem horizontalen Kreise bewegt. Der Winkel eines Hinganges ist  $\pi/A'$ . Ist  $v$  von Null verschieden, enthält das Kreispendel einen um die Schwerachse seines Schwerpunktes und Aufhängepunktes rotierenden Körper. Die Schwingungsdauer ist dann

136)

Ist  $C$  ein spitzer Winkel  
 nur möglich für

 $J$ 

und zwar, wenn das Un-  
 schiedenen Geschwindigkeits

Kehren wir wieder  
 sierung zurück, d. h.  $\mu$   
 ist. Dann wird die e  
 allen drei Fällen ( $C <$   
 (im zweiten genau uner  
 drei Fällen mit wachs  
 angenähert den Wert  
 kannten sogenannten  $P$   
 ist, so dreht sich dabei  
 im positiven Sinne um  
 Sinne um  $O\zeta$  erfolgt.

Genau dieselbe Prä-  
 möglich, wenn unter s  
 Schwerkraft beliebige an  
 deren Wirksamkeit auf

### § 23. Komponenten der Drehung um die drei festen Achsen Winkel der fixen und beweglichen

Zwischen den verschiedenen beim Problem eines festen Körpers um einen fixen Punkt zu betrachtenden Größen besteht noch eine große Anzahl Beziehungen, welche wir nun kennen lernen wollen. In den Gleichungen 94) die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  in drei Komponenten um die drei Koordinatenachsen als Drehungsachsen zerlegt, zerlegt sie nun in drei Komponenten um die drei festen Achsen  $OX, OY, OZ$  als Drehungsachsen zu betrachten. Die letzteren Komponenten mit  $l, m, n$  bezeichnen, betrachten jede der drei Lagenänderungen eintreten, wenn

1. bei konstantem  $B$  und  $C$  der Winkel  $A$  wächst,
2. bei konstantem  $A$  und  $C$  der Winkel  $B$  wächst,
3. bei konstantem  $A$  und  $B$  der Winkel  $C$  wächst,

und zerlegen jede in drei Drehungen um die drei fixen Koordinatenachsen. Die erste Lageänderung bedarf keiner weiteren Zerlegung, da sie einer

also ganz wie im Schema  
 die Komponenten der ers  
 in die dritte die der d  
 die erste Horizontalreih  
 um  $O X$ , in die zweite  
 $O Z$ , so erhalten wir fol

$$137) \left\{ \begin{array}{c|c} & d A \\ \hline O X & - \\ \hline O Y & - \\ \hline O Z & d A \end{array} \right.$$

Um  $l, m, n$  zu find  
 während der Zeit  $dt$   
 $C$  um  $dC = C' dt$  wächs  
 Drehung, welche der K  
 fährt, ist die Komponen  
 der Richtung  $O X$ , und  
 gilt, so ist also:

$$138) \quad l = -\alpha \gamma B' + a C'$$

Wir wollen nun die  
 mit

Gl. 139. 140.] II. § 24. Differentiale der Richtung

$$139) \left\{ \begin{array}{c|c|c} & O X & O Y \\ \hline O \xi & w_x = \alpha b + \alpha \beta c & u_y = \alpha b - \alpha \beta c \\ \hline O \eta & v_x = \alpha \beta - \alpha b c & v_y = \alpha \beta + \alpha b c \\ \hline O \zeta & w_x = \alpha \gamma & w_y = -\alpha \gamma \end{array} \right.$$

Nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie hat man ferner:

$$140) \left\{ \begin{array}{l} u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1 \quad u_x^2 + \\ v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 1 \quad u_y^2 + \\ w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = 1 \quad u_z^2 + \\ u_x u_y + v_x v_y + w_x w_y = 0 \quad u_x v_x + \\ u_x u_z + v_x v_z + w_x w_z = 0 \quad u_x w_x + \\ u_y u_z + v_y v_z + w_y w_z = 0 \quad v_x w_x + \end{array} \right.$$

$$140a) \left\{ \begin{array}{l} u_x = v_y w_z - v_z w_y, \quad v_x = w_y u_z - w_z u_y, \\ u_y = v_z w_x - v_x w_z, \quad v_y = w_z u_x - w_x u_z, \\ u_z = v_x w_y - v_y w_x, \quad v_z = w_x u_y - u_x w_y, \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{c} u_x v_x w_x \\ u_y v_y w_y \\ u_z v_z w_z \end{array} \right| = 1$$



$u_y + du_y \dots$  die Werte, die  $u_y$  zu  $t + dt$  haben, und wolle  $\mu dt, v dt$  um die drei A zusammenengenommen der sind, welche der Körper

Wir wollen da die Die einen sollen ohne sich mit dem Körper n Lagen  $O\xi'''$ ,  $O\eta'''$ ,  $O\zeta'''$  sollen zur Zeit  $t$  mit  $O$  im Raume und daher gegen  $OX, OY, OZ$  blei zur Zeit  $t$  und  $O\xi_1, O$  ordinatennachsen Winkel,  $O\xi'''$ ,  $O\eta'''$  und  $O\zeta'''$  ab deren Kosinus  $u_x + du_x$

Die gesamte Lagen Zeit  $dt$  kann man sich vorgebracht denken:

1. Der Körper erfä  $O\xi_1$ . Schon bei dieser mit dem Körper verbund

Körper verbundene Achse  $O\eta''$  in die Lage  $O\zeta_1$  geführt werden. Da sie sich hierbei wieder bewegt, die senkrecht auf der Ebene der b  $O\zeta_1$  und  $O\eta''$  steht, so ändert sich deren um unendlich Kleines zweiter Ordnung, es ist a

$$141) \quad \cos(O\zeta_1, O\eta'') = \lambda dt.$$

$O\eta'''$  ist aber genau die Lage der Ach schon oben mit  $O\eta'''$  bezeichnet wurde. D Lage, die dadurch entsteht, daß der Körper während  $dt$  erfolgende Lagenänderung erfä die Achse  $O\eta$  fest mit ihm verbunden bleibt der Winkel, welche  $O\eta'''$  mit den fixen Ko bildet, sind daher diejenigen Größen, w  $v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z$  bezeichnet haben mit denselben Koordinatenachsen diejenigen deren Kosinus wir mit  $w_x, w_y$  und  $w_z$  bez Daher ist:

$$142) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(O\zeta_1, O\eta''') = w_x(v_x + dv_x) + w_y(v_y + dv_y) \\ \quad \quad \quad + w_z(v_z + dv_z) = w_x dv_x + \end{array} \right.$$

wegen

ist. Man erhält daher

$$145) \quad \lambda = -v_x \frac{dw_x}{dt}$$

Die zyklische Vertausch

$$146) \quad \begin{cases} \mu = u_x \frac{dw_x}{dt} + u_y \frac{dw_y}{dt} \\ \nu = v_x \frac{du_x}{dt} + v_y \frac{du_y}{dt} \end{cases}$$

Diese Gleichungen  
wir in ihre rechte Seite  
Schema 139) einsetzen.

nach der Zeit kann m  
dann auch in die rechte  
und 146) einzusetzen sin  
Seiten in 144), 145) un  
die nach 94) gleich  $\lambda$ ,  $\mu$

Wir können analog  
und deren Differentialqu  
 $l dt$ ,  $m dt$  und  $n dt$  sind  
dem Körper um die A  
müssen, um die Lager  
während der Zeit  $dt$  wi

die Achsen  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  doppelt gezeichnet ohne unteren Index sollen die oben besprochenen um die Winkel  $-l dt$ ,  $-m dt$ ,  $-n dt$  machen die wir mit  $OX_1$ ,  $OY_1$ ,  $OZ_1$  bezeichnen wollen im Raume und daher auch relativ gegen  $O\xi$ ,  $O\eta$ ,  $O\zeta$  da wir jetzt auch die Lage der letzteren unveränderlich lassen. Die Drehung  $-l dt$  geschehe um die Achse  $OX$ . Durch dieselbe gehe  $OY$  in  $OY'$  über, so daß man analog der Gleichung 141 (148)

$$-l dt = \sin(OY, OY') = \cos(OY', OZ)$$

Durch die beiden Drehungen  $-m dt$  und  $-n dt$  um die Achse  $OY_1$  und  $OZ_1$  soll die Gerade  $OY'$  in  $OY''$  und  $OY'''$  übergehen. Es ist dann  $OY'$  mit den oben schon so bezeichneten Geraden identisch. Durch die beiden zuletzt erwähnten Drehungen der Geraden  $OY''$  und  $OZ_1$  in  $OY'''$  und  $OZ_1$  (nur um unendlich Kleines zweiter Ordnung ändern sich die Richtungen aus Gleichung 148):

$$149) \quad \cos(OY''', OZ_1) = -l dt.$$

Da nun

$$\cos(OZ_1, O\xi) = u_z, \quad \cos(OZ_1, O\eta) = v_z, \quad \cos(OZ_1, O\zeta) = w_z,$$

$$\begin{aligned}
 & u_x \\
 & u_x v_x + \\
 & u_x w_x +
 \end{aligned}$$

als lineare Gleichungen  
 terminante der Koeffizien

$$\begin{aligned}
 & u_x \\
 & v_x \\
 & w_x
 \end{aligned}$$

so folgt:

$$151) \quad \begin{cases} u_x \Delta \\ u_y \Delta \\ u_z \Delta \end{cases}$$

Addiert man die Quadrate  
 man links  $\Delta^2$ . Die rechte

$$(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)(w_x^2 + w_y^2 + w_z^2)$$

bringen. Es folgt also

Bringt man die Punkte  
 Oξ-Achse, und gleichze

Koordinaten desselben Punktes bezüglich der Koordinatenachsen. Die letzteren Koordinaten natürlich nicht mit der Zeit. Dann hat man bekannten Formeln für Koordinatentransformat

$$152) \quad \begin{cases} x = u_x \xi + v_x \eta + w_x \zeta \\ y = u_y \xi + v_y \eta + w_y \zeta \\ z = u_z \xi + v_z \eta + w_z \zeta \end{cases}$$

$$153) \quad \begin{cases} \xi = u_x x + u_y y + u_z z \\ \eta = v_x x + v_y y + v_z z \\ \zeta = w_x x + w_y y + w_z z. \end{cases}$$

In jeder dieser Gleichungen zieht ein la oder  $z$  auch den Index  $x$  oder  $y$  oder  $z$  n griechischer Buchstabe  $\xi$ ,  $\eta$  oder  $\zeta$  aber de  $u$ ,  $v$  oder  $w$ .

Wir wollen nun die Zuwächse  $dx$ ,  $dy$ , welche die Koordinaten  $x, y, z$  durch diejenige L erfahren, die der Körper während der Zeit  $dt$  Lagenänderung kann durch die drei Drehung

$$154) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{array} \right.$$

Dieselben Formeln erh  
Gleichungen 152) nach  
weglichen Koordinaten  
veränderlich verbunden  
stant zu betrachten. F

$$\frac{dx}{dt} = \xi \frac{a}{t}$$

Substituiert man f  
chungen 153), so folgt m  
wieder die erste der  
halbe Masse jedes Ma  
Quadrate seiner Gesch

multipliziert, darin  $\frac{dx}{dt}$   
ersetzt und über alle  
man wieder den Ausdr

Wir können also in allen Formeln, welche Momente  $D, E, F$  nicht enthalten, die Achse  $OZ$  mit den Achsen  $O\xi, O\eta, O\zeta$  und vertauschen, wodurch sich auch die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  vertauschen, dagegen  $C$  in  $-C$  und folglich  $A$  in  $-A$  und  $\gamma$  in  $-\gamma$  übergeht. Alle derartige Formeln vom geometrischem Charakter bleiben daher richtig. Jede in der folgenden Reihe angeführte Gleichung vertausche man mit der nächsten Reihe unter ihr stehenden, jede in der zweiten Reihe stehende mit der dritten, und so weiter, bis man die ersten mit den letzten vertauschen:

$$x, y, z, u_y, u_z, v_x, v_z, w_x, w_y, l, m, n, A, C,$$

$$\xi, \eta, \zeta, v_x, w_x, u_y, w_y, u_z, v_x, -\lambda, -\mu, -\nu, B, -C,$$

$u_x, v_y, w_z$  dagegen müssen ungeändert bleiben. Bei der Vertauschung erhält man z. B. aus  $u_y = \alpha b$  die entsprechende Formel für  $v_x$ , ebenso aus  $l = \alpha^2$  den für  $-\lambda$  gefundenen Wert etc. Derartige Vertauschungsregeln ersparen, wenn man die eine Hälfte gefunden hat, die Arbeit der Ableitung der anderen Hälfte. Hat man aber alle Formeln bereits abgeleitet, so sind die Vertauschungsregeln wenigstens eine oft willkürliche



ist dies in der Tat der Fall, wenn die Bewegung  
wird, da man dadurch  
möglichst einfache zerle  
noch nicht die Bewegun  
Fall explizit hingeschrie

Behandelt man die Aufgaben der Mechanik in der  
Allgemeinheit, so werden sie komplizierter und unan-  
nehmlicher, so daß man alle Aufgaben der Mechanik  
derselben Formel beizubringen sucht, aus der man  
derselben gewinnen kann. Diese Behandlungsweise  
Lagranges Mécanique analytique, die Vorlesungen  
über Mechanik.

Ich will hier nur k  
behandelten Spezialfälle  
gemeinsten Fall enthalte  
rigkeit zu den allgemei

Um in der allgem  
kommen freien festen E



$$G_1 = G + M \xi^2,$$

$$G_1' = G' + M \eta \zeta,$$

(vergl. Formel 149), § 5

Die gesamte leben  
im I. Teile am Schluss  
Summe der Ausdrücke  
die Werte 156) substitu

$$159) \quad \left\{ \begin{array}{l} T = \frac{M}{2} [(u - \eta v + \\ + \frac{1}{2} (G \lambda^2 + H \end{array} \right.$$

Wir wollen nun  
auf den Körper wirken  
beweglichen Koordinat  
Die Größe  $X$  ist dann  
der Gesamtmasse  $M$  de  
schleunigung des Schw  
der Richtung zusamm  
szissenachse gerade zu  
komponente des Schwe  
Zeit  $t$  gleich  $\varphi$ . Zur

daher mit Vernachlässigung von unendlich kleiner Ordnung  $\tau^2$ :

$$\varphi_2 = \varphi + \frac{d\varphi}{dt} \tau - \chi v \tau + \psi \mu$$

Die Beschleunigung des Schwerpunktes  $\varphi_2$  welche die bewegliche Abszissenachse zu  $\tau$  aber ist

$$\lim \frac{\varphi_2 - \varphi}{\tau} = \frac{d\varphi}{dt} - v\chi + \mu\psi$$

und da diese Beschleunigung mit  $M$  multipliziert sein muß, so hat man schließlich:

$$M \frac{d\varphi}{dt} = Mv\chi - M\mu\psi + X$$

Diese Gleichung kann mit Rücksicht auf die Werte von  $T$  und die Werte 156) von  $\varphi, \chi, \psi$  auch geschrieben werden

$$160) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u} = v \frac{\partial T}{\partial v} - \mu \frac{\partial T}{\partial w} + X$$

was mit der Gleichung 12) der 6. Vorlesung von Lagranges hoffschen Mechanik übereinstimmt.

Nun folgt aus 158)

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \nu}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \lambda} = \frac{d}{dt}$$

$$+ \eta$$

Drückt man vermöge der scheinenden Werte von

und  $\frac{\partial T}{\partial \nu}$  aus und substituiert in 160), so liefert die Gleichung

$$163) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \lambda} = \nu \frac{\partial T}{\partial \lambda}$$

was mit Kirchhoffs Gleichung

Die Komponente der Kraft in der Richtung der freien Enden (Gleichungen 153):

augenblicklichen Richtung der Achsen  $\Omega$  gezogenen Achsen gleich  $\frac{\partial T_1}{\partial \lambda}$ ,  $\frac{\partial T_1}{\partial \mu}$ ,  $\frac{\partial T_1}{\partial \nu}$ . Die  $T_1$  des Körpers bezüglich dreier gleichgerichteter fixen Koordinatenursprung  $O$  gezogener Achsen  $O\xi$  sind nach § 31, S. 112 des I. Teiles um  $\frac{1}{2} M v^2$  größer, welche der stets in  $S$  befindlichen bewegten Masse  $M$  bezüglich der letzteren zugeordnet sind. Da die Punkte  $O$  und  $S$  bezüglich der Achsen  $O\xi$  die Koordinaten  $a, b, c$  resp.  $\xi, \eta, \zeta$  haben, sind die Koordinaten von  $S$  bezüglich der Achsen  $O\xi$   $\xi - a, \eta - b, \zeta - c$ . Die Geschwindigkeiten von  $S$  in den Richtungen der beweglichen Koordinatenachsen sind nach 156)

$$\frac{1}{M} \frac{\partial T}{\partial u}, \quad \frac{1}{M} \frac{\partial T}{\partial v}, \quad \frac{1}{M} \frac{\partial T}{\partial w},$$

daher ist das Flächenmoment der in  $S$  befindlichen Masse  $M$  bezüglich der Achse  $O\xi$ :

$$(\eta - b) \frac{\partial T}{\partial w} - (\zeta - c) \frac{\partial T}{\partial v}.$$

Das Flächenmoment  $m_\xi$  des ganzen Körpers

$$\alpha = -$$

ist, daß aus 160) folgt

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda} =$$

und nimmt dazu die v  
durch zyklische Vertau  
ergibt sich unter Zuzieh

$$166) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_x = (\beta u_z - \gamma u \\ + (\beta w_z - \gamma u \end{array} \right.$$

Setzt man den Diff  
der Zeit gemäß dem  
Drehungsmoment  $D_{\text{fix}}$  a  
szissenachse und bildet a  
zyklische Vertauschung  
man das letzte System  
Körper geltenden Gleich  
unter Berücksichtigung  
nungen von denen Kir  
identisch ist, welches die

dann jedenfalls durch Gleichungen von der Form (23) mit den rechtwinkligen verknüpft.

Wir nennen den aus diesen bei Konstanten  $p_k$  folgenden Differentialquotienten von  $x_k$  nach  $t$  partiellen nach  $t$  und bezeichnen ihn mit  $\partial x_k / \partial t$ . Die Bedeutung hat  $\partial x_k / \partial p_h$ , so daß man also hat

$$167) \quad \frac{\partial x_k}{\partial t} = \Pi^k, \quad \frac{\partial x_k}{\partial p_h} = \Pi_h^k.$$

Aus denselben Gleichungen folgt:

$$168) \quad x'_k = \Pi^k + \sum_1^s \Pi_h^k p'_h.$$

Dagegen ist bei Bildung der  $\delta x_k$  die Zeit  $t$  zu erhalten, so daß man hat:

$$169) \quad \delta x_k = \sum_1^s \Pi_h^k \delta p_h.$$

Versteht man daher unter einem partiellen Differentialquotienten der  $x'_k$  einen solchen, wobei von den  $p_h$  und  $p'_h$  alle konstant erhalten werden, bis auf die nach welcher differenziert wird, so ist:



so daß wir schreiben

$$174) \quad \frac{\partial x'_k}{\partial p_h} - \frac{d}{dt}$$

Die geometrische  
Größen ergibt sich du

Läßt man zuerst  
wachsen, so nimmt die  
um  $\left( \Pi_i^k + \frac{\partial \Pi_i^k}{\partial p_h} dp_h \right) dp_i$   
wohin während dieses g  
dessen Masse  $m_r$  ist,  
schoben wird, heiße  $B$   
 $dp_i$  und dann erst  $p_h$

$\Pi_i^k dp_i$  und dann um  
gelange derselbe mater  
seiner unverschobenen  
daß, wenn  $k = r, r +$

$$\left( \frac{\partial \Pi_i^k}{\partial p_h} - \frac{d}{dt} \right)$$

$$\mathfrak{E}_h^k = \lim \frac{G_h^k H_h^k}{d t d p_h}$$

ist.

Bezeichnet man die Faktoren, mit denen die Bedingungsgleichungen 6) multipliziert, mit  $\mu_l$ , so folgt aus 6) und 4) in der bekannten Weise

$$175) \quad X_k = m_k x_k'' + \sum_1^{\tau} \mu_l \xi_k^l, \quad k = 1, 2, \dots$$

Führt man in dem Ausdrucke  $\sum_1^{3n} X_k$  die  $\delta p_h$  vermöge der Gleichungen 23) ein, so erhält man in dem Falle liefern:  $\delta x_k = \sum_1^s \Pi_h^k \delta p_h$ , so erhält man

$$176) \quad \sum_1^{3n} X_k \delta x_k = \sum_1^s \sum_1^{3n} X_k \Pi_h^k \delta p_h$$

Der Koeffizient von  $\delta p_h$  in dem Ausdrucke ist die auf die Koordinate  $p_h$  wirkende Kraft genannt und  $P_h$  bezeichnet werden, so daß man also hat

$$177) \quad P_h = \sum_1^{3n} X_k \Pi_h^k = \sum_1^{3n} (m_k x_k'' + \sum_1^{\tau} \mu_l \xi_k^l) \Pi_h^k$$

daher:

$$\frac{\partial x'_k}{\partial p_h} =$$

wogegen:

daher:

$$179) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_k}{\partial p_h} \right)$$

ist. Man hat daher:

$$\frac{d}{dt} \left( x'_k \frac{\partial x_k}{\partial p_h} \right) = x''_k \frac{\partial x_k}{\partial p_h}$$

oder nach Gleichung 1

$$180) \quad \frac{d}{dt} \left( x'_k \frac{\partial x_k}{\partial p_h} \right) = x''_k$$

Wir multiplizieren

$$\text{beiderseits } \sum_1^r \mu_l \xi_k^l \frac{\partial x_k}{\partial p_h}$$

lich  $k$  von 1 bis  $3n$ .

Beginnen wir ganz

$$183) \quad \sum_1^{3n} k \xi_k^l \delta x_k = 0,$$

wenn sich die  $p_h$  beliebig ändern, daher anderen bis auf eines, das wir wieder  $p_h$  sowie die Zeit konstant bleiben. Mit an ist für jeden Wert von  $l$  und  $h$ :

$$184) \quad \sum_1^{3n} k \xi_k^l \frac{\partial x_k}{\partial p_h} = 0, \quad l = 1, 2, 3 \dots \tau. \quad h$$

3. Nach Gleichung 177) ist:

$$185) \quad \sum_1^{3n} k \left( m_k x_k'' + \sum_1^{\tau} \mu_l \xi_k^l \right) \frac{\partial x_k}{\partial p_h} =$$

4. Aus Gleichung 182) folgt:

$$186) \quad \sum_1^{3n} k m_k x_k' \frac{\partial x_k'}{\partial p_h} = \frac{\partial T}{\partial p_h}.$$

Es ergibt sich also:

$$187) \quad \frac{d q_h}{d t} = P_h + \frac{\partial T}{\partial p_h} - \sum_1^{3n} k m_k x_h' \left( \mathfrak{E}_h^k + \right.$$

$$188) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dq_h}{dt} &= P_h + \frac{\partial T}{\partial p_h} + \sum_r m_r v_r \left[ u_r^h \cos(v_r u_r^h) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_i u_{hi}^r \cos(v_r u_{hi}^r) \right], \end{aligned} \right.$$

wobei in der ersten Summe  $r$  bloß die Werte 1, 4, 7...  $3n-2$  zu durchlaufen hat.

Hiermit ist also 1. erwiesen, dass die Lagrangeschen Gleichungen in unveränderter Form bei Anwendung nicht-holonomer Koordinaten ungültig sind, und 2. jedesmal das Korrektionsglied berechnet, welches man ihnen beifügen muss, damit sie wieder gültig werden.

Der Beweis erleidet nur eine unwesentliche Modifikation, wenn die Anzahl  $s$  der generalisierten Koordinaten größer ist als die Anzahl  $i = 3n - \tau$  der Freiheitsgrade des Systems. Dann bleiben zwischen den generalisierten Koordinaten noch  $s - i = \sigma$  Bedingungsgleichungen bestehen, von denen einige holonom, andere nichtholonom sein können. Von den  $\tau$  zwischen den rechtwinkligen Koordinaten bestehenden Bedingungsgleichungen werden dann also bloß  $\tau - \sigma$  durch die generalisierten Koordinaten identisch erfüllt.

Die Variationen  $\delta x_k$  der rechtwinkligen Koordinaten bei konstanter Zeit müssen nach wie vor die  $\tau$  Gleichungen 6) erfüllen. Wir können alle diese Gleichungen in eine einzige zusammenfassen, indem wir jede mit einem willkürlichen Faktor  $\mu_i$  multiplizieren und nachher alle addieren. Dadurch erhalten wir die resultierende Gleichung:

$$189) \quad \sum_i \sum_k \mu_i \xi_k^i \delta x_k = 0.$$

Die Festsetzung, daß diese Gleichung für beliebige Werte der  $\mu$  bestehen soll, vertritt vollkommen die  $\tau$  Gleichungen 6).

Wenn wir nun in der Gleichung 189) die  $\delta x$  durch die  $\delta p$  ersetzen, so muß sich die Anzahl der willkürlichen Faktoren  $\lambda$  von  $\tau$  auf  $\sigma$  reduzieren, da ja zwischen den  $\delta p$  nur  $\sigma$  Gleichungen bestehen, welche wir in der Form schreiben wollen:

$$190) \quad \sum_1^{\sigma} \pi_h^l \delta p_h = 0, \quad l = 1, 2 \dots \sigma.$$

Die Gleichung 189) muß sich daher nach Einführung der  $\delta p$  auf folgende reduzieren:

$$\sum_1^{\sigma} \lambda_i \sum_1^{\sigma} \pi_h^l \delta p_h = 0,$$

wobei die  $\lambda$  jedenfalls  $\sigma$  lineare, voneinander unabhängige Funktionen der  $\mu$  sind.

Die Faktoren  $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_r$  wurden nun nach Lagrange so gewählt, daß der Ausdruck

$$\sum_1^{3n} \left( X_k - m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_1^r \mu_l \xi_k^l \right) \delta x_k$$

für alle Werte der  $\delta x_k$  verschwindet. Nach Einführung der generalisierten Koordinaten verwandelt sich dieser Ausdruck in

$$\sum_1^{\sigma} \left\{ P_h - \frac{d q_h}{dt} + \frac{\partial T}{\partial p_h} - \sum_1^{3n} m_k \omega'_k \left( x_h^k + \sum_1^{\sigma} x_{hi}^k \right) + \right. \\ \left. + \sum_1^{\sigma} \lambda_i \pi_k^i \right\} \delta p_h = 0$$

oder

$$\sum_1^r \left\{ P_h - \frac{d q_h}{dt} + \frac{\partial T}{\partial p_h} + \sum_r m_r v_r \left[ u_h^r \cos(v_r, u_h^r) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_1^{\sigma} u_{hi}^r \cos(v_r, u_{hi}^r) \right] + \sum_1^{\sigma} \lambda_i \pi_h^i \right\} \delta p_h = 0,$$

wobei wieder  $r$  die Werte  $1, 4, 7 \dots 3n - 2$  zu durchlaufen hat. Wegen der für die  $\mu$  getroffenen Wahl, aus welcher analoge Eigenschaften für die  $\lambda$  resultierten, muß die linke Seite der letzten beiden Gleichungen für alle überhaupt möglichen Werte der  $\delta p_h$  verschwinden und man erhält die Bewegungsgleichungen:

$$191) \left\{ \begin{aligned} \frac{dq_h}{dt} &= P_h + \frac{\partial T'}{\partial p_h} - \sum_1^{3n} m_k x'_k \left( x_h^k + \sum_1^s x_{hi}^k p'_i \right) + \\ &+ \sum_1^s \lambda_i \pi_h^i, \end{aligned} \right.$$

oder

$$192) \left\{ \begin{aligned} \frac{dq_h}{dt} &= P_h + \frac{\partial T'}{\partial p_h} + \sum_r m_r v_r \left[ u_h^r \cos(v_r, u_h^r) + \right. \\ &+ \left. \sum_1^s u_{hi}^r \cos(v_r, u_{hi}^r) \right] + \sum_1^s \lambda_i \pi_h^i = 0. \end{aligned} \right.$$

Die durch den Mangel der Holonomität der Koordinaten bedingten Zusatzglieder zu den Lagrangischen Gleichungen sind also ganz dieselben geblieben, wie in dem Falle, dass die Anzahl der generalisierten Koordinaten gleich der Zahl der Freiheitsgrade des Systems ist, so daß zwischen den generalisierten Koordinaten keine Gleichungen mehr übrig bleiben und es ist somit die gestellte Aufgabe in voller Allgemeinheit gelöst.

### § 28. Beispiel zum vorigen Paragraphen.

Wir wollen die gefundenen allgemeinen Gleichungen an folgendem Beispiele<sup>1)</sup> illustrieren. Zwei Riemenscheiben sind durch einen Treibriemen verbunden, welcher parallel der Achse der Scheiben in ähnlicher Weise hin- und hergeschoben werden kann, wie man einen Treibriemen von einer wirkenden Scheibe auf eine Leerscheibe oder umgekehrt verschiebt. Die eine Riemenscheibe verjüngt sich nach einer Seite hin, wogegen sich die andere nach der entgegengesetzten Seite nach einem solchen Gesetze verjüngt, daß ein und derselbe Treibriemen überall paßt, wenn er in der geschilderten Weise verschoben wird. Eine solche Verschiebung des Riemens bewirkt gewissermaßen eine Veränderlichkeit der Radien  $r_1$  und  $r_2$  der beiden Riemenscheiben und daher auch des Übersetzungsverhältnisses  $p_2 = r_1/r_2$ .

<sup>1)</sup> Borchardts Journ. Bd. 98, Heft 1, S. 37, 1885.

Ist daher  $p'_1$  die Winkelgeschwindigkeit der einen,  $w'$  die der anderen Riemenscheibe, so hat man  $w' = p_2 p'_1$ . Wenn  $p_2$  veränderlich ist, so kann man  $p_2$  und die gesamte Winkeldrehung  $p_1$  der ersten Riemenscheibe während einer gewissen Zeit als Koordinaten eines Punktes  $A$ , der entweder der zweiten Riemenscheibe angehört oder mit ihr fest verbunden ist, wählen. Es sind dies nichtholonome Koordinaten, da es zur Bestimmung der Lage des Punktes  $A$  nicht gleichgültig ist, ob zuerst  $p_1$  und dann  $p_2$ , oder umgekehrt zuerst  $p_2$  und dann  $p_1$  sich um dieselben Beträge ändern.

Der gleiche Effekt würde erzielt, wenn sich zwischen zwei nach entgegengesetzten Seiten konisch sich verjüngenden drehbaren Rotationskörpern eine Scheibe  $S$  drehen würde, die auf keinem der Rotationskörper gleiten könnte und die parallel ihrer Drehungsachse verschiebbar wäre.

Man kann vielleicht zweifeln, ob derartige Bedingungen ohne jede Gleitung realisierbar sind. Jedenfalls haben aber die Bedingungen, an welche wir uns das aus den beiden Riemenscheiben bestehende mechanische System gebunden dachten, genau die Eigenschaften, welche Hertz in seiner Mechanik von nichtholonomen Bedingungen fordert (Hertz's Mechanik, 1. Buch, Abschnitt IV). Daß das in diesem Beispiele gebrauchte mechanische System nicht holonom ist, ersieht man auch, wenn man bedenkt, dass die Winkelstellung  $w$  der zweiten Riemenscheibe nur durch die Gleichung  $dp_2 = a dp_1$  bestimmt ist, welche nicht integriert werden kann. Daher ist diese Winkelstellung und die Lage jeder Masse, deren Bewegung davon abhängt, in nicht holonomer Weise durch die Koordinaten  $p_1$  und  $p_2$  bestimmt.

Die Summe der lebendigen Kraft aller mit den beiden Riemenscheiben fest verbundenen Massen kann als Funktion von  $p_2$  und  $\frac{dp_1}{dt}$  ausgedrückt werden. Sie ist

$$T = \frac{1}{2}(K + Lp_2^2)p_1',$$

wenn  $t$  die Zeit ist und  $K$  und  $L$  die Trägheitsmomente aller mit der ersten, respektive zweiten Riemenscheibe fest verbundenen Massen bezüglich der jeweiligen Drehungsachsen



sind. Alles übrige denken wir uns dabei massenlos, so unter anderen den Riemen, resp. die Scheibe  $S$ .

Wir wollen die Bewegungsgleichungen nur in dem speziellen Falle ableiten, daß unser ganzes System aus einem einzigen Massenpunkte von der Masse  $m$  besteht, welcher mit der Achse im unveränderlichen Abstände  $r$  davon fest verbunden ist, um welche die Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega'$  geschieht. Dann ist also  $K = 0$ ,  $L = m r^2$ .

Wir wählen die Ebene, in welcher die Masse  $m$  rotiert, als Koordinatenebene, den Mittelpunkt des Kreises, in dem sie sich bewegt, als Koordinatenursprung, und bezeichnen die rechtwinkligen Koordinaten der Masse  $m$  zu irgend einer Zeit mit  $x_1, x_2$ .

Dann reduzieren sich die Gleichungen 28) auf

$$193) \quad dx_1 = \Pi_1^1 dp_1 + \Pi_2^1 dp_2, \quad dx_2 = \Pi_1^2 dp_1 + \Pi_2^2 dp_2,$$

wobei

$$\Pi_2^1 = \Pi_2^2 = 0, \quad \Pi_1^1 = -p_2 x_2, \quad \Pi_1^2 = p_2 x_1.$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = -p_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial p_1} = -p_2^2 \alpha_1$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_2} = -x_2 - p_2 \frac{\partial x_2}{\partial p_2} = -x_2$$

$$\frac{\partial H_1^2}{\partial p_1} = p_2 \frac{\partial w_1}{\partial p_1} = p_2^2 x_1, \quad \frac{\partial H_1^2}{\partial p_2} = w_1 + p_2 \frac{\partial w_1}{\partial p_2} = w_1.$$

$$194) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_{12}^1 = -\bar{x}_{21}^1 = \frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} - \frac{\partial \Pi_1}{\partial p_2} = \alpha_2 \\ \bar{x}_{12}^2 = -\bar{x}_{21}^2 = \frac{\partial \Pi_2}{\partial p_1} - \frac{\partial \Pi_2}{\partial p_2} = -\alpha_1. \end{array} \right.$$

$$x_{12}^2 = -x_{21}^2 = \frac{\partial \Pi_2^2}{\partial p_1} - \frac{\partial \Pi_1^2}{\partial p_2} = -x_1.$$

$$x_{11}^1 = x_{22}^1 = x_{11}^2 = x_{22}^2 = 0, \quad x_1' = -x_2 p_2 p_1', \quad x_2' = x_1 p_2 p_1'.$$

Das Gleichungssystem 187) reduziert sich auf die beiden Gleichungen:

$$195) \left\{ \begin{aligned} \frac{d q_1}{d t} &= P_1 + \frac{\partial T}{\partial p_1} - m [\alpha'_1 (\xi_{11}^1 p'_1 + \xi_{12}^1 p'_2) + \\ &\quad + \alpha'_2 (\xi_{11}^2 p'_1 + \xi_{12}^2 p'_2)] \\ \frac{d q_2}{d t} &= P_2 + \frac{\partial T}{\partial p_2} - m [\alpha'_1 (\xi_{21}^1 p'_1 + \xi_{22}^1 p'_2) + \\ &\quad + \alpha'_2 (\xi_{21}^2 p'_1 + \xi_{22}^2 p'_2)], \end{aligned} \right.$$

$$\frac{dq_i}{dt} = P_i + \frac{\partial T}{\partial p_i} - m[x'_i(x_{2i}^1 p'_1 + x_{2i}^1 p'_2) + x'_i(x_{2i}^2 p'_1 + x_{2i}^2 p'_2)],$$

30 May 1964

1970-1971

100

und die Substitution der gefundenen Werthe liefert:

$$196) \quad \frac{d(p_2^2 p_1')}{dt} = \frac{1}{mr^2} P_1 + p_2 p_1' p_2', \quad P_2 = 0.$$

Die Lagrangeschen Gleichungen in ihrer gewöhnlichen Form aber würden falsche Bewegungsgleichungen liefern. So würde z. B. die gewöhnliche Lagrangesche Gleichung auf die Koordinate  $p_2$  angewandt lauten:

$$\frac{dq_2}{dt} = P_2 + \frac{\partial T}{\partial p_2}.$$

Nun enthält der Ausdruck für  $T$  das  $p_2'$  gar nicht, es ist also  $q_2 = 0$ , dagegen enthält er das ungestrichene  $p_2$  und es ist  $\partial T / \partial p_2 = m r^2 p_2 p_1'^2$ . Aus der gewöhnlichen Form der Lagrangeschen Gleichung würde also folgen

$$P_2 = - m r^2 p_2 p_1'^2,$$

was, wie man leicht einsieht, eine Ungereimtheit wäre, wegen das von uns gefundene Resultat  $P_2 = 0$  physikalisch vollkommen evident ist.

Dieselben Gleichungen passen auf folgenden Fall. Mit einer horizontalen Achse sei eine vertikale ebene Scheibe fest verbunden.  $p_1$  sei deren Drehung zu irgend einer Zeit. Daneben steht eine vertikale Achse von quadratischem Querschnitt, welche Massen trägt und deren Drehungswinkel  $w$  sei. Auf ihr gleite eine Röhre von gut passender Höhlung mit quadratischem Querschnitte. Mit der Röhre ist eine kreisförmige horizontale Scheibe vom Radius eins fest verbunden, welche auf der vertikalen Scheibe rollt und darauf zwar radial aber nicht tangential gleiten kann. Der veränderlich gedachte Abstand des Mittelpunktes der horizontalen Scheibe vom Punkte, wo die Verlängerung der horizontalen Achse die vertikale Achse trifft, ist  $p_3$ . Dem Übelstand, daß eine einzige in einem fixen Kreise bewegliche Masse durch zwei Koordinaten bestimmt erscheint, können wir abhelfen, indem wir die Gleichungen für den Fall ableiten, daß die Masse  $m$  oder eine zweite Masse mit der horizontalen Scheibe fest verbunden ist.

## § 29. Variation der Integrationsgrenzen.

Wir wollen nun wieder zu den Formeln des § 6 und speziell zur Gleichung 41) zurückkehren.

Für jede unter dem Einflusse gegebener Kräfte gegebenen Bedingungen gemäß erfolgende (natürliche) Bewegung gilt, wie dort bewiesen wurde, die Gleichung 42), aus welcher die Bewegungsgleichungen 43), resp. 49) folgen. Umgekehrt folgt aus den Bewegungsgleichungen die Gleichung 42); denn, wenn wir die allgemeinste Form der Bewegungsgleichungen, nämlich die Gleichung 49) mit  $\delta p_h$  multiplizieren und bezüglich aller  $h$  summieren, so erhalten wir

$$\sum_1^i \left( -\frac{d q_h}{dt} + \frac{\partial T}{\partial p_h} + P_h \right) \delta p_h = \sum_1^i \sum_1^i \lambda^i \pi_h^i \delta p_h,$$

was infolge der Bedingungsgleichungen des Systems verschwindet. Multipliziert man die linke Seite mit  $dt$  und integriert von  $t_0$  bis  $t_1$ , so ergibt sich in der Tat die Gleichung 42).

Mit Rücksicht auf diese Gleichung reduziert sich die Gleichung 41) auf:

$$197) \quad \int_{t_0}^{t_1} \left( \delta T + \sum_1^i P_h \delta p_h \right) dt = \sum_1^i \left[ q_h \delta p_h \right]_{t_0}^{t_1}.$$

Diese Gleichung gilt jedesmal, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Die unvariierte Bewegung muß eine „natürliche“ sein, d. h. sie muß mit den Bedingungsgleichungen vereinbar sein und ihr zeitlicher Vorlauf muß die Bewegungsgleichungen des Systems erfüllen.

2. Die Variation muß ebenfalls mit den Bedingungsgleichungen vereinbar sein, d. h. für ein holonomes System muß jeder Zustand der variierten Bewegung, für ein nicht holonomes aber jeder Übergang von irgend einem Zustande der unvariierten zum korrespondierenden Zustande der variierten Bewegung mit den Bedingungsgleichungen vereinbar sein.

Besonders wichtig ist der Fall, daß eine Kraftfunktion  $V$  existiert, daß also

$$\sum_h P_h \delta p_h = - \delta' V$$

die vollständige Variation einer Funktion  $-V$  der verallgemeinerten Koordinaten darstellt und daher mit  $-\delta V$  zu bezeichnen ist. Die Funktion  $V$  kann auch die Zeit explizit enthalten; allein dann darf die Zeit nicht variiert werden.

Da es für das Folgende von besonderer Wichtigkeit ist, so heben wir nochmals hervor, daß  $V$  lediglich die für die unvariierte Bewegung geltende Kraftfunktion bedeutet, und daß daher unter  $\delta V$  nur die Variation des  $V$  zu verstehen ist, welche dadurch bewirkt wird, daß bei der variierten Bewegung die Koordinaten statt  $p_h$  die Werthe  $p_h + \delta p_h$  haben. Eine etwaige Kraftfunktion der Zusatzkräfte, welche den Übergang der unvariierten in die variierte Bewegung bewirken, ist niemals in  $\delta V$  einzubegreifen.

Wir setzen, wenn eine Kraftfunktion existiert, ein für allemal:

$$198) \quad T - V = H, \quad T + V = E.$$

Die Gleichung 197) reduziert sich dann auf

$$199) \quad \int_{t_0}^{t_1} \delta H dt = \sum_h \left[ q_h \delta p_h \right]_{t_0}^{t_1}.$$

Es seien nun, wie bisher immer,  $p_h$ ,  $p'_h$  und  $q_h$  die Werte einer beliebigen (der  $h$ -ten) Koordinate, der entsprechenden Geschwindigkeit und des entsprechenden Momentes zu irgend einer Zeit  $t$  für die unvariierte Bewegung;  $p_h = p_h + \delta p_h$ ,  $p'_h = p'_h + \delta p'_h$ ,  $q_h = q_h + \delta q_h$  aber seien die Werte derselben Koordinate, Geschwindigkeit und desselben Momentes zur selben Zeit bei der variierten Bewegung.

Ferner seien  $T$  und  $V$  die Werte, welche die lebendige Kraft und die Kraftfunktion annehmen, wenn man darin für die Zeit, die Koordinaten und in  $T$  auch für die Geschwindigkeiten oder Momente die Werte  $t$ ,  $p_h$ ,  $p'_h$ ,  $q_h$  substituiert,  $\mathfrak{T} = T + \delta T$ ,  $\mathfrak{V} = V + \delta V$  aber die Werte, welche diese Größen für dieselbe Zeit  $t$  annehmen, wenn man für die Koordinaten, Geschwindigkeiten und Momente die Werte  $p_h$ ,

$p'_h, q_h$  substituiert. Da  $V$  und  $T$  dieselben Funktionen der Zeit, der Koordinaten und der Geschwindigkeiten oder Momente geblieben sind, so ist

$$200) \quad \delta V = \sum_h \frac{\partial V}{\partial p_h} \delta p_h = - \sum_h P_h \delta p_h.$$

$$201) \quad \delta T = \sum_h \left( \frac{\partial T}{\partial p'_h} \delta p'_h + \frac{\partial T}{\partial p_h} \delta p_h \right).$$

Wir bezeichnen weiter mit  $p_h^0, p'_h^0, q_h^0, V_0, T_0, H_0$  und  $E_0$  die Werte dieser Größen für die untere Grenze  $t_0$  der Integrale 197) und 199).  $p_h^0 = p_h^0 + \delta p_h^0$ ,  $p'_h^0 = p'_h^0 + \delta p'_h^0$ ,  $q_h^0 = q_h^0 + \delta q_h^0$  aber seien die Werte der  $h$ -ten Koordinate, Geschwindigkeit und des  $h$ -ten Momentes bei der variierten Bewegung zur gleichen Zeit  $t_0$ . Ebenso seien  $p_h^1, p'_h^1, q_h^1, V_1, T_1, H_1$  und  $E_1$  die Werte der entsprechenden Größen für die unvariierte Bewegung zur Zeit  $t_1$ , und  $p_h^1 = p_h^1 + \delta p_h^1$ ,  $p'_h^1 = p'_h^1 + \delta p'_h^1$  und  $q_h^1 = q_h^1 + \delta q_h^1$  die Werte für den der Zeit  $t_1$  entsprechenden Zustand der variierten Bewegung.

Wir setzen nun

$$202) \quad W = \int_{t_0}^{t_1} H dt$$

und bilden auch das diesem Integrale entsprechende Integral  $\mathfrak{B} = W + \delta W$  für die variierte Bewegung. In diesem letzteren Integrale braucht aber die untere Grenze für die Zeit nicht mit der unteren Grenze  $t_0$  der Zeit in dem für die unvariierte Bewegung geltenden Integrale  $W$  zusammenzufallen, sondern die erstere untere Grenze kann eine unendlich wenig von  $t_0$  verschiedene Zeit  $t_0 = t_0 + \delta t_0$  sein. Ebenso kann die obere Grenze des Integrales  $\mathfrak{B}$  eine unendlich wenig von  $t_1$  verschiedene Zeit  $t_1 = t_1 + \delta t_1$  sein, so daß wir erhalten

$$203) \quad \mathfrak{B} = W + \delta W = \int_{t_0}^{t_1} (\mathfrak{X} - \mathfrak{B}) dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{S} dt,$$

in welcher Gleichung auch die unendlich kleinen Glieder erster Ordnung gleich sein müssen.

Nach den Regeln der Variationsrechnung hat man unendlich Kleines zweiter und höherer Ordnung zu vernachlässigen und findet somit:

$$204) \left\{ \begin{aligned} \delta W &= (T_1 - V_1) \delta t_1 - (T_0 - V_0) \delta t_0 - \int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta V) dt = \\ &= H_1 \delta t_1 - H_0 \delta t_0 + \int_{t_0}^{t_1} \delta H dt. \end{aligned} \right.$$

Wenn  $V$  und die  $\pi$  die Zeit nicht explizit enthalten, also für skleronome durch skleronome Koordinaten bestimmte Systeme kann man übrigens ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\delta t_0 = 0$  setzen. Man denkt sich dann die variierte Bewegung zur selben Zeit beginnend, wie die unvariierte, was in diesem Falle ihren Verlauf in keiner Weise ändert. Die Variation der oberen Grenze  $\delta t_1$  muß dann gleich dem Betrage gemacht werden, um wieviel die ganze Integrationszeit in dem durch Formel 203) bestimmten Integrals  $\mathfrak{B}$  größer ist, als in dem durch Formel 202) gegebenen Integrale  $W$ .

Das Integral  $\int_{t_0}^{t_1} \delta H dt$  in Gleichung 204) hat nun genau dieselbe Bedeutung wie in Gleichung 199). Wie dort kann man in  $\delta H = \delta T - \delta V$  die Werte 200) und 201) substituieren, die mit  $\delta p'$  behafteten Glieder partiell integrieren und schließlich die infolge der Bewegungsgleichungen des Systems und den Bedingungen sich auf Null reduzierenden Glieder weglassen. Man erhält dann wieder die Gleichung 199), nämlich

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta H dt = \sum_{h=1}^{h=n} \left| q_h \overline{\delta p_h} \right|_{t_0}^{t_1}.$$

Die Substitution dieses Wertes in die Gleichung 204) aber liefert:

$$205) \quad \delta W = H_1 \delta t_1 - H_0 \delta t_0 + \sum_1^s (q_h^1 \overline{\delta p_h^1} - q_h^0 \overline{\delta p_h^0}).$$

Man kann auch umgekehrt sagen, wenn man von irgend einem Übergange gewisser Anfangswerte zu gewissen Endwerten als der unvariierten Bewegung ausgeht und die

Gleichung 205) für alle variierten Übergänge gilt, welche den Bedingungen 45) entsprechen, so ist der unvariierte Übergang, von dem man ausging, immer einer der für die gegebenen Werte von  $V$  und  $\pi$  geltenden mechanischen Gleichungen entsprechende (eine „natürliche“) Bewegung des Systems, da dann nach partieller Integration der  $\delta p'$  enthaltenden Glieder in dem von  $t_0$  bis  $t_1$  erstreckten Integrale der Koeffizient der Variation jeder Koordinate, insofern dieselbe nicht durch die Bedingungsgleichungen bestimmt ist, für jedes  $t$  verschwinden muß, woraus man wieder die Bewegungsgleichungen des Systems erhält.

Die Gleichung 205) sagt daher, wenn sie für alle mit den auseinandergesetzten Bedingungen verträglichen Variationen einer gewissen zeitlichen Veränderung der  $p$  gilt, aus, daß diese Veränderung der  $p$  den Bewegungsgleichungen der Mechanik entspricht also die entsprechende Bewegung des Systems eine natürliche ist.

v § 30. Ableitung der Gleichung, welche die Grundlage für das Folgende bildet.

In Formel 205) sind  $\overline{\delta p}_h^1$  und  $\overline{\delta p}_h^0$  die Zuwächse, welche die  $h$ -te Koordinate erfährt, wenn man von den Zuständen der unvariierten Bewegung, welche zu den Zeiten  $t_0$  und  $t_1$ , also den beiden Integrationsgrenzen des durch Formel 202) gegebenen Integrales  $W$  eintreten, zu denjenigen Zuständen übergeht, welche bei der variierten Bewegung zu denselben Zeiten  $t_0$  und  $t_1$  eintreten. Es ist besser, diejenigen Zuwächse einzuführen, welche eintreten, wenn man zu den Zuständen übergeht, welche bei der variierten Bewegung zu den Zeiten  $t_0 = t_0 + \delta t_0$  und  $t_1 = t_1 + \delta t_1$  eintreten, welche letztere Zeiten wieder die beiden Integrationsgrenzen des durch Formel 203) definierten Integrales  $\mathfrak{B}$  bilden. Wir wollen die in letzterer Weise erhaltenen Koordinatenzuwächse durch Weglassung des darübergesetzten Querstriches bezeichnen. Beim Übergange von dem zur Zeit  $t_0$  stattfindenden Zustande der unvariierten Bewegung zu dem zur gleichen Zeit  $t_0$  stattfindenden Zustande der variierten Bewegung

wächst die Koordinate  $p_h$  und  $\bar{\delta} p_h^0$ . Da bis auf unendlich Kleines sich auch bei der variirten Bewegung die Koordinate  $p_h$  zur Zeit  $t_0$  mit der Geschwindigkeit  $p_h^0$  ändert, so wächst beim Übergange von dem zur Zeit  $t_0$  stattfindenden Zustande der variirten Bewegung zu dem zur Zeit  $t_0 + \delta t_0$  stattfindenden Zustande derselben Bewegung  $p_h$  um  $p_h^0 \delta t_0$ . Die Summe dieser beiden Zuwächse ist die GröÙe, die wir soeben  $\delta p_h^0$  ohne Querstrich darüber nannten.

Es ist also  $\delta p_h^0 = \delta p_h^0 + p_h^0 \delta t_0$  und ebenso findet man  $\delta p_h^1 = \bar{\delta} p_h^1 + p_h^1 \delta t_1$ . Da zudem nach Gleichung 57) und 198) allgemein

$$\sum_1^s p_h^1 q_h = 2T \quad \text{und} \quad E = 2T - H$$

ist (ersterer aber nur für skleronome generalisierte Koordinaten), so erhält man:

$$206) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_1^s (q_h^1 \bar{\delta} p_h^1 - q_h^0 \bar{\delta} p_h^0) &= \sum_1^s (q_h^1 \delta p_h^1 - q_h^0 \delta p_h^0) - \\ &\quad - 2(T_1 \delta t_1 - T_0 \delta t_0). \end{aligned} \right.$$

Die Substitution dieses Werthes in die Gleichung 205) aber liefert:

$$207) \quad \delta W = -E_1 \delta t_1 + E_0 \delta t_0 + \sum_1^s (q_h^1 \delta p_h^1 - q_h^0 \delta p_h^0).$$

Diese Gleichung ist die Fundamentalgleichung, aus welcher wir nun eine Reihe allgemeiner Relationen ableiten wollen. Sie erfordert nicht, daß das System skleronom sei, aber die generalisierten Koordinaten müssen skleronom sein, d. h. die Lage des Systems muß durch sie zu allen Zeiten in gleicher Weise bestimmt sein. Es muß eine Kraftfunktion existieren, welche aber die Zeit explizit enthalten kann. Falls diese die Zeit nicht explizit enthält, ist natürlich  $E_0 = E_1$ .

Die Gleichung 207) zeigt, daß die GröÙe  $W$ , wenn die Zeit, die Anfangs- und die Endlagen nicht variirt werden, für natürliche Bewegungen ein Grenzwert ist. Wenn die Integrationsgrenzen nicht über ein gewisses Maß ausgedehnt werden<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, S. 64.



und die Kraftfunktion  $V$  konstant ist, also keine expliziten Kräfte wirken, so ist dieser Grenzwert stets ein absolutes Minimum. Man sieht dies am besten, wenn man rechtwinklige Koordinaten einführt. Es ist dann die zweite Variation von  $W$  gleich der Summe der mit den Massen multiplizierten Quadrate der Variationen der Geschwindigkeitskomponenten, also eine wesentlich positive Größe. Wenn dagegen explizite Kräfte wirken, so wären darüber noch besondere Untersuchungen notwendig, und es wäre vielleicht der Zusammenhang zwischen den Bedingungen der Existenz eines absoluten Minimums und der kinetischen Stabilität der betreffenden Bewegung von Interesse.

Man logte der Funktion  $W$ , weil sie in so vielen Fällen ein absolutes Minimum ist, eine metaphysische Bedeutung bei und nannte sie die Wirkung, besser hätte man sie freilich den „Kraftaufwand“ genannt; denn man könnte sich metaphysische Gründe denken, weshalb die Natur alles mit dem kleinsten Kraftaufwande erreicht, kaum aber dafür, daß sie immer eine möglichst kleine Wirkung erzielt. Es machte übrigens schon Jacobi darauf aufmerksam, daß, wo Differentialgleichungen existieren, im allgemeinen immer auch ein bestimmtes Integral existieren wird, welches durch die den Differentialgleichungen entsprechenden Veränderungen zu einem Grenzwerte gemacht wird, daß es daher gar keine metaphysische Bedeutung hat, wenn es ein solches Integral auch für die Differentialgleichungen der Mechanik gibt.

Ohne irgend welche metaphysische Nebengedanken wollen wir trotzdem kürzshalber alle aus Gleichung 207) fließenden Relationen unter dem Namen „Wirkungsprinzip“ zusammenfassen. Das einfachste derselben war schon lange bekannt, aber erst durch Hamilton und noch vollkommener durch Jacobi erhielten wir eine allgemeine Übersicht über alle diese Relationen und ihren Zusammenhang, weshalb man wohl auch ihren Inbegriff, aber keineswegs bloß den im ersten Abschnitte behandelten Satz als das Hamiltonsche oder Hamilton-Jacobische Prinzip bezeichnen darf.

## § 31. Allgemeine Gleichungen Jacobis.

Ehe wir jedoch hierzu übergehen, wollen wir, *Jacobi* folgend, unsere Gleichungen noch verallgemeinern. Wir werden zwar in den folgenden Paragraphen dieses Buches nur Fälle betrachten, wo  $T$  eine homogene quadratische Funktion der  $p'$  ist. Man stößt aber manchmal auf Gleichungen, die sonst denen ganz analog sind, mit denen wir es hier zu tun haben; nur daß die  $p'$  in anderer Weise in  $T$  enthalten sind. Es ist daher nützlich, uns für einen Augenblick von jeder speziellen Annahme über das Vorkommen der  $p'$  in  $T$  unabhängig zu machen.

Sei  $H$  eine ganz beliebige Größe, welche in beliebiger Weise 1. eine independente Variable, welche wir behufs Vereinfachung der Sprechweise die Zeit nennen, 2. beliebige Funktionen  $p_1, p_2 \dots p_s$  der Zeit und 3. deren Differentialquotienten  $p'_1, p'_2 \dots p'_s$  nach der Zeit enthalte. Die partiellen Ableitungen des  $H$  nach den  $p'$ , welche natürlich so zu bilden sind, als ob die  $p, p'$  und  $t$  independent wären, bezeichnen wir mit  $q$ . Wir setzen also:

$$208) \quad q_h = \frac{\partial H}{\partial p'_h}, \quad h = 1, 2 \dots s.$$

Durch diese  $s$  Gleichungen sind die  $q$  als Funktionen der  $p, p'$  und der Zeit gegeben. Wir nehmen an, daß sich daraus umgekehrt die  $p'$  als Funktionen der  $p, q$  und der Zeit finden lassen und daß sie dann in der Form erscheinen:

$$209) \quad p'_h = \psi_h(p, q, t).$$

Alle diese Ausdrücke können entwickelt werden, wenn  $H$  als Funktion der  $p, p'$  und der Zeit gegeben ist. Wir setzen weiter:

$$210) \quad E = \sum_{h=1}^{h=s} q_h p'_h - H.$$

Ferner nehmen wir an, daß von der Zeit  $t_0$  bis zur Zeit  $t_1$  die  $p, p'$  und  $q$  bestimmt sind durch ihre Anfangswerte und folgende Differentialgleichungen

$$211) \quad \frac{d q_h}{d t} = - \frac{\partial_q E}{\partial p_h} + \sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i \pi_h^{(i)},$$

wo der Index  $q$  des  $\partial$  ausdrückt, daß die partiellen Diffe-

rentialquotienten so zu verstehen sind, daß  $E$  als Funktion der  $p, q$  und der Zeit auszudrücken, also die  $p'$  darin durch die Werte 209) zu ersetzen sind. Außerdem sollen die Zuwächse der  $p$  noch  $\sigma$  Bedingungsgleichungen von der Form

$$212) \quad \tau dt + \sum_{h=1}^{h=\sigma} \pi_h^{(l)} dp_h = 0, \quad l = 1, 2 \dots \sigma$$

erfüllen, wodurch die  $\lambda$  bestimmt erscheinen. Sobald  $H$  gegeben ist, können die  $p'$  als Funktionen der  $q$  ausgedrückt werden, es sind also durch die Gleichungen 211) und 212) die Gesetze der Veränderung der  $p, p'$  und  $q$  bestimmt. Den Inbegriff der mittels dieser Gleichungen aus gewissen Anfangswerten für alle Zeiten von  $t_0$  bis  $t_1$  folgenden Werte nennen wir die unvariirten Werte oder auch symbolisch die unvariirte Bewegung der Werte der  $p, p'$  und  $q$ .

Wir wollen nun den zu jeder Zeit hierbei eintretenden Werten der  $p$  unendlich kleine Zuwächse erteilen. Die dadurch entstehenden Werte der  $p$  nennen wir deren variirte Werte.  $p_h$  soll dabei zur Zeit  $t$  den Zuwachs  $\delta p_h$  erfahron. Sämtliche  $\delta p$  sollen sonst ganz willkürlich sein, nur sollen sie gleich endlichen kontinuierlichen differenzierbaren Funktionen der Zeit multipliziert mit einer unendlich kleinen Konstanten sein, und den Bedingungen

$$213) \quad \sum_{h=1}^{h=\sigma} \pi_h^{(l)} \delta p_h = 0, \quad l = 1, 2 \dots \sigma$$

genügen. Der Inbegriff aller variirten Werte der  $p$  bildet wieder ein kontinuierlich mit der Zeit sich änderndes Wertsystem, das variirte oder die variirte Wertebewegung, bei welcher der Differentialquotient des  $p_h$  zur Zeit  $t$  gleich

$$\frac{dp_h}{dt} + \frac{d\delta p_h}{dt}$$

ist. Der zweite Addend ist also der Zuwachs  $\delta p'_h$ , den der Wert der Größe  $p'_h$  zur Zeit  $t$  beim Übergang von einem Wertsystem der ursprünglichen zum korrespondierenden (d. h. in unseren gegenwärtigen Betrachtungen zur gleichen Zeit gehörenden) der variirten Bewegung erfährt. Die entsprechenden Zuwächse der  $q$  findet man durch Variirung der Gleichungen 208).

Wir wollen nun das Integral  $\int_{t_0}^{t_1} H dt$  zunächst für die ursprüngliche Wertebewegung berechnen und dann den Zuwachs  $\delta \int_{t_0}^{t_1} H dt$  suchen, welchen dieses Integral beim Übergang von der ursprünglichen zur variirten Bewegung erfährt. Nach den Regeln der Variationsrechnung ist, da wir in diesem Paragraphen die Zeitgrenzen nicht variiren:

$$214) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} H dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{h=1}^{h=s} \left( q_h \delta p'_h + \frac{\partial_{p'_h} H}{\partial p_h} \delta p_h \right),$$

und man erhält durch partielle Integration:

$$215) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} H dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{h=1}^{h=s} \left( -\frac{d q_h}{d t} + \frac{\partial_{p'_h} H}{\partial p_h} \right) \delta p_h + \sum_{h=1}^{h=s} \left[ q_h \delta p_h \right]_{t_0}^{t_1}.$$

Wir denken uns nun in die GröÙe  $E$  einmal die Variabeln  $t, p, p'$ , dann die Variabeln  $t, p, q$  eingeführt, indem wir die  $p'$  durch die Werte 209) ersetzen. Wenn dann sämtliche der GröÙen  $t, p, p'$  ganz willkürliche unendlich kleine Zuwächse  $\delta_1 t$ ,  $\delta_1 p_h$  und  $\delta_1 p'_h$  erfahren, so wird das so oder so ausgedrückte  $E$  denselben Zuwachs  $\delta_1 E$  erfahren müssen. Die aus den Gleichungen 208) hierbei folgenden Zuwächse der  $q$  bezeichnen wir mit  $\delta_1 q$ .

Aus Gleichung 210) folgt:

$$\delta_1 E = \sum_{h=1}^{h=s} p'_h \delta_1 q_h - \frac{\partial_{p'_h} H}{\partial p_h} \delta_1 p_h - \frac{\partial H}{\partial t} \delta_1 t.$$

Denkt man sich dagegen in  $E$  die Variabeln  $p, q$  und  $t$  eingeführt, so folgt:

$$\delta_1 E = \sum_{h=1}^{h=s} \left( \frac{\partial_q E}{\partial p_h} \delta_1 p + \frac{\partial_q E}{\partial q_h} \delta_1 q_h \right) + \frac{\partial E}{\partial t} \delta_1 t.$$

Da diese beiden Werte von  $\delta_1 E$  für alle  $\delta_1 p$ ,  $\delta_1 q$  und  $\delta_1 t$  identisch gleich sein müssen, so folgt:

$$216) \quad \frac{\partial_q E}{\partial p_h} = -\frac{\partial_{p'_h} H}{\partial p_h}, \quad \frac{\partial_q E}{\partial q_h} = \frac{d p_h}{d t}, \quad \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Genügt daher das System der unvariirten Werte (die unvariirte Wertebewegung) den Gleichungen 211), so folgt

$$\sum_{h=1}^{h=s} \left( -\frac{dq_h}{dt} + \frac{\partial p'_h}{\partial p_h} \right) \delta p_h = \sum_{h=1}^{h=s} \left( -\frac{dq_h}{dt} - \frac{\partial q_h E}{\partial q_h} \right) \delta p_h =$$

$$= - \sum_{l=1}^{l=s} \sum_{h=1}^{h=s} \lambda_l \pi_h^{(l)} \delta p_h,$$

was vermöge der Bedingungen 213) verschwindet. Man erhält also aus 215):

$$217) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} H dt = \sum_{h=1}^{h=s} \left[ q_h \delta p'_h \right]_{t_0}^{t_1}.$$

Man sieht sofort, daß diese Gleichung eine Verallgemeinerung der Gleichung 207) ist, welche man wieder erhält, wenn man speziell unter den  $p$  die generalisierten Koordinaten des dort betrachteten materiellen Systems und unter  $H$  den Ausdruck  $T - V$  versteht, dagegen ist Gleichung 207) insofern weit allgemeiner, als in derselben auch die Integrationsgrenzen für die Zeit variiert worden, während in 217) die Zeit nicht variiert. Da  $T$  unter den für die Gleichung 207) geltenden Voraussetzungen der Gleichung 57) genügt, so geht unter ebendiesen Voraussetzungen die Gleichung 210) über in  $E = 2T - H$ , was dann liefert:  $E = T + V$ .

Diese allgemeineren Gleichungen fallen jedoch nicht zusammen mit den mechanischen Bewegungsgleichungen, welche für den Fall gelten, daß die Koeffizienten der Quadrate und Produkte der verallgemeinerten Geschwindigkeiten im Ausdruck für die lebendige Kraft die Zeit explizit enthalten. Im letzteren Falle ist 207) und selbst die Lagrangeschen Gleichungen im allgemeinen nicht mehr richtig. So würde für rechtwinklige Koordinaten bei variabler Masse die Gleichung 207) nur gültig bleiben, wenn die Bewegungsgleichungen so lauten würden:

$$\frac{dq_h}{dt} = \frac{d}{dt} \left( m \frac{dx}{dt} \right) = - \frac{\partial H}{\partial p_h} = - \frac{\partial V}{\partial x} = X,$$

während man annimmt, daß auch bei veränderlicher Masse  
 $m \frac{d^2 x}{dt^2} = X$  ist.

Hamel (Karlsruhe) hat die Lagrangeschen Gleichungen nach einer anderen Seite hin verallgemeinert, indem er statt der Momente lineare Funktionen derselben (Momentoide) einführte, nachdem schon Lagrange und Poisson gewisse allgemeine Formeln aufgestellt hatten, in denen statt der Koordinaten und Momente irgend welche Funktionen derselben eingefügt erscheinen.

### § 32. Nochmals das Prinzip der stationären Wirkung.

Wir gelangen in folgender Weise zunächst wieder zum Prinzip der stationären Wirkung. Wir lassen sowohl die untere Grenze  $t_0$  als auch die obere Grenze  $t_1$  in Formel 207) oder, wenn keine Kraftfunktion existiert, in Formel 199) unverändert, so daß  $\delta t_0 = \delta t_1 = 0$  ist, was, sobald die Kraftfunktion und die Bedingungsgleichungen die Zeit nicht explizit enthalten, darauf hinauskommt, daß wir die Zeitdauer der Bewegung, über welche das Integral 202) erstreckt ist, unverändert lassen. Ferner lassen wir zur Zeit  $t_0$ , welche die untere Grenze des Integrals 202) bildet, sämtliche materiellen Punkte für die unveränderte und veränderte Bewegung die gleiche Lage haben, so daß also  $\delta p_h^0$ , welches in diesem Falle mit  $\bar{\delta p}_h^0$  identisch ist, für jedes  $h$  verschwindet. Endlich lassen wir die Variationen der Geschwindigkeit für die Zeit  $t_0$  und die Zusatzkräfte, welche die unveränderte Bewegung in die veränderte verwandeln, sonst zwar ganz willkürlich sein, binden sie aber an die eine Beschränkung, daß sie bewirken sollen, daß auch zur Zeit  $t_1$  die Lage sämtlicher materieller Punkte für die unveränderte und veränderte Bewegung dieselbe sein soll, so daß also auch  $\delta p_h^1 = \bar{\delta p}_h^1$  für jedes  $h$  verschwindet. Dann folgt also aus Gleichung 207):

218)

$$\delta W = 0.$$

$W$  ist ein sogenannter Grenzwert. Sein Zuwachs ist ein unendlich Kleines höherer Ordnung bezüglich der Zuwächse  $\delta p_h$ ,  $\delta p'_h$  und  $\delta q_h$ , welche die Werte der Koordi-

naten, Geschwindigkeiten und Momente zu irgend einer Zeit im allgemeinen erfahren.

Dieses Prinzip gilt, wie wir schon im I. Abschnitt sahen, und wie sich sofort ergibt, wenn man in Gleichung 199) statt in Gleichung 207) die Zeit und die Anfangs- und Endkoordinaten unvariiert läßt, auch wenn keine Kraftfunktion existiert. Nur darf dann das Variationszeichen nicht im gewöhnlichen Sinne vor das Integralzeichen gesetzt werden, sondern

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt$$

muß bloß als ein symbolischer Ausdruck für

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta V) dt$$

betrachtet werden. Um dies sinnfällig zu machen, könnte man wieder dafür  $\delta' W$  schreiben, und sobald unentschieden ist, mit welchem Falle man es zu tun hat,  $\delta'' W$ , so daß also die allgemeinste Gleichung so lautet:

218a)

$$\delta'' W = 0.$$

Das Prinzip der stationären Wirkung gestattet, jede bestimmte mechanische Aufgabe auf eine rein phoronomische zu reduzieren, d. h. die Integrale der Bewegungsgleichungen jedes mechanischen Problems sind allgemein mit der zur Befriedigung der Grenzbedingungen nötigen Zahl von Integrationskonstanten gefunden, wenn die Lösung folgender Aufgabe gelungen ist: Die gegebene Zahl materieller Punkte ist im Verlaufe der zwischen zwei gegebenen Zeitmomenten  $t_0$  und  $t_1$  liegenden Zeit in solcher Weise kontinuierlich im Raume von einer bestimmten willkürlich gegebenen Anfangslage zu einer ebenso willkürlich gegebenen Endlage über-

zuführen, daß  $W = \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt$ , was wir die Wirkung während dieser Zeit nannten, ein Grenzwert wird, wobei  $T$  eine durch die Natur des Systems gegebene Funktion der Koordinaten und Geschwindigkeiten,  $V$  eine ebenfalls gegebene

Funktion der Koordinaten und der Zeit ist, welche beide Funktionen nebst den etwa vorhandenen Bedingungsgleichungen, die für holonome Systeme bei der unvariirten und variirten Überführung eingehalten werden müssen, die Natur des Problems bestimmt. Für nicht holonome Systeme muß jeder Übergang von den unvariirten zu den korrespondierenden variirten Werten die Bedingungen erfüllen.

Löst man die Bewegungsgleichungen der Mechanik für irgend eine mechanische Aufgabe in der geschilderten Weise mittels des Prinzips der stationären Wirkung, so ist natürlich die Berechnung der Integrationskonstanten am einfachsten, wenn diese nicht dadurch bestimmt sind, daß die Werte der Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten für irgend eine Zeit ( $t = t_0$ , den Zeitanfang), sondern dadurch, daß die Werte der Koordinaten allein aber für zwei verschiedene Zeiten ( $t_0$  und  $t_1$ , z. B. den Anfang und das Ende der Bewegung) gegeben sind. Sind sie in anderer Weise gegeben, so verfährt man folgendermaßen: Man denkt sich zuerst die Koordinatenwerte für  $t = t_0$  und  $t = t_1$  gegeben und findet so Integrale der Bewegungsgleichungen mit der nötigen Zahl von Integrationskonstanten. Hat man einmal so die Form der Integralgleichungen gefunden, so ist dann die Bestimmung der darin enthaltenen Integrationskonstanten aus irgend welchen anderen Grenzbedingungen bloß eine Aufgabe der gewöhnlichen Algebra und macht meist keine Schwierigkeit mehr.

Daß unter Einhaltung der Bedingungsgleichungen des Systems und der Grenzbedingungen  $\delta t_0 = \delta t_1 = \delta p^0_k = \delta p^1_k = 0$  die Gleichung  $\delta W = 0$  besteht, ist die Bedingung, daß die betreffende zeitliche Veränderung der  $p$  mit den Bewegungsgleichungen verträglich ist, also eine natürliche Bewegung darstellt. Ein spezieller Fall zeitlicher Veränderung ist es, wenn alle  $p$  sich gar nicht mit der Zeit ändern. Für diese Bewegung, welche für skleronome Systeme jedenfalls eine natürliche ist, ist dann  $T = 0$ ,  $V$  konstant,  $\delta W = -\delta[(t_1 - t_0)V] = -(t_1 - t_0)\delta V$ . Die Bedingung, daß unter dem Einfluß gewisser Kräfte und Bedingungen vollkommene Ruhe des Systems möglich, d. h. wie man sich



ausdrückt, daß sich die Kräfte am ruhenden Systeme unter der gegebenen Einschränkung der Bewegungsfreiheit das Gleichgewicht halten, ist also  $\delta V = 0$  oder in rechtwinkligen Koordinaten  $\sum_{h=1}^{s_n} X_h \delta x_h = 0$ . Dieses Prinzip, dessen Beweis Lagrange an die Spitze seiner Statik stellt, ist also ein einfacher spezieller Fall des Prinzips der stationären Wirkung. Für rheonome Systeme gilt derselbe Beweis, wenn man  $t_1 - t_0$  als sehr klein annimmt.

Wir nannten  $V$  die Kräftefunktion oder auch das Potential. Helmholtz nennt es das statische Potential. Weil sich für bewegte Systeme in gewissem Sinne der Ausdruck  $H = T - V$  damit analog verhält, nennt Helmholtz die letztere Größe das kinetische Potential, den Ausdruck

$$\frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} H dt = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt$$

nennt er das mittlere kinetische Potential und bezeichnet ihn mit  $\bar{H}$ . Es ist  $W = (t_1 - t_0) \bar{H}$ , und da beim Prinzip der stationären Wirkung  $t_1 - t_0$  unvariiert bleiben muß, kann man dasselbe auch dahin aussprechen, daß das mittlere kinetische Potential  $\bar{H}$  ein Grenzwert sein muß.

### § 38. Beispiele.

*Erstes Beispiel über die Anwendung des Prinzips der stationären Wirkung.* Es sei ein einziger materieller Punkt gegeben, auf den gar keine (expliziten) Kräfte wirken und dessen Bewegung auch an gar keine irgendwie beschaffene Bedingungen geknüpft sei. Dann ist  $V$  konstant und man sieht sofort, daß man es ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit gleich Null setzen kann. Die Wirkung während der Zeit  $t_1 - t_0$  ist also, abgesehen von einem konstanten Faktor:

$$219) \quad 2W = \int_{t_0}^{t_1} c^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} (u^2 + v^2 + w^2) dt.$$

An Stelle des Problems, in diesem Falle die Gesetze der Bewegung zu finden, tritt das geometrische Problem,

den Punkt aus irgend einer gegebenen Anfangslage in irgend eine gegebene Endlage kontinuierlich mit der Zeit so überzuführen, daß der Ausdruck 219) bei konstantem  $t_0$  und  $t_1$  ein Grenzwert wird, wobei  $c$  die Geschwindigkeit,  $u, v, w$  deren Komponenten in den Koordinatenrichtungen sind. Da in diesem Integrale die Koordinaten nicht vorkommen, so ist es gar nicht notwendig, dieselben als Variable einzuführen; man kann gleich die Variablen  $u, v$  und  $w$  beibehalten; nur hat man wegen der Unveränderlichkeit des Ausgangspunktes und Endpunktes der Bewegung die Bedingung beizufügen, daß die drei Integrale

$$\int_{t_0}^{t_1} u dt, \quad \int_{t_0}^{t_1} v dt, \quad \int_{t_0}^{t_1} w dt$$

unveränderlich sein müssen. Um den Grenzwert des Integrals 219) unter der Nebenbedingung, daß die letzteren drei Integrale unveränderlich sein müssen, zu finden, hat man nach den Regeln der Variationsrechnung zur Variation des ersten Integrals die der drei letzten mit willkürlichen aber konstanten Faktoren  $\lambda, \mu, \nu$  multipliziert, hinzuzusaddieren, wodurch man erhält:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt [(u + \lambda) \delta u + (v + \mu) \delta v + (w + \nu) \delta w] = 0.$$

In dieser letzteren Gleichung sind jetzt  $\delta u, \delta v, \delta w$  ganz willkürlich. Daher müssen für den Grenzwert ihre Koeffizienten gleich Null, also  $u = -\lambda, v = -\mu, w = -\nu$ , also alle drei Geschwindigkeitskomponenten konstant sein (Galileis Trägheitsgesetz).

Die Aufgabe, daß ein einziger materieller Punkt gegeben ist, auf den keine expliziten Kräfte wirken, der aber gezwungen ist, sich entweder auf einer vorgeschriebenen Fläche oder auf einer vorgeschriebenen Kurve zu bewegen, wollen wir nicht weiter behandeln, da er nach dem Gesagten dem der Variationsrechnung Kundigen keine Schwierigkeit bereiten dürfte.

*Zweites Beispiel.* Wenn die Bewegung eines freien materiellen Punktes mit den Koordinaten  $x, y, z$  unter dem

Einfluß der Schwere zu suchen ist, so kann man die  $x$  Achse vertikal nach abwärts ziehen. Dann ist  $V$  gleich  $-mgx$  und das Problem, die Bewegung des materiellen Punktes zu finden, reduziert sich auf die Aufgabe, einen Punkt so kontinuierlich während der gegebenen Zeit  $t_1 - t_0$  von einer beliebig gegebenen Anfangslage in eine beliebig gegebene Endlage zu überführen, daß dabei das Integral

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right] + mgx \right\} dt,$$

welches jetzt die Wirkung während der Zeit  $t_1 - t_0$  darstellt, ein Grenzwert wird. Sucht man nach den bekannten Regeln der Variationsrechnung die Bedingung hierfür, wobei man am besten tut  $t_0$ ,  $t_1$  und  $dt$  unvariirt zu lassen, so folgt:

$$m \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{dx}{dt} \frac{d\delta x}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{d\delta y}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{d\delta z}{dt} + g\delta x \right) dt = 0.$$

Die partielle Integration und separate Nullsetzung der Koeffizienten von  $\delta x$ ,  $\delta y$  und  $\delta z$  liefert dann die bekannten Gleichungen:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} - g = 0.$$

Die sechs Integrationskonstanten bestimmen sich dadurch, daß für  $t = t_0$  und  $t = t_1$  die Werte der Koordinaten gegeben sind.

Auch bei dieser zweiten Aufgabe wollen wir den Fall, daß der materielle Punkt nicht frei, sondern gezwungen ist, entweder auf einer vorgeschriebenen Fläche oder auf einer Kurve zu bleiben, so daß der Grenzwert desselben Ausdrucks aber jetzt unter der Nebenbedingung zu suchen ist, daß die Koordinaten die Gleichung der Fläche oder die beiden Gleichungen der Kurve erfüllen müssen, dem Leser überlassen.

#### § 34. Helmholtz' Kräfte $\mathfrak{P}$ und Definition der $p'$ durch $\delta \Omega = 0$ .

In der Physik kommt häufig der Fall vor, daß die Gesamtkraft aus zwei Summanden besteht, von denen der eine eine Kraftfunktion  $\mathcal{F}$  hat, der andere bloß als Funktion

der Zeit gegeben ist, so daß die nach irgend einer Koordinate  $p_h$  wirkende Kraft  $P_h$  die Form hat  $-\frac{\partial F}{\partial p_h} + \mathfrak{P}_h$ , wobei  $\mathfrak{P}_h$  eine gegebene Funktion der Zeit ist. Dann hat man einfach den Fall einer die Zeit enthaltenden Kraftfunktion und in den entwickelten Gleichungen ist zu setzen:

$$220) \quad V = F - \sum_1^s \mathfrak{P}_h p_h.$$

Es kann dann das betreffende System, seine Bewegung und auch die Kraftfunktion  $F$  gegeben sein und von den Gleichungen die Beantwortung der Frage gefordert werden, welche Kräfte  $\mathfrak{P}_h$  zu den durch die Kraftfunktion  $F$  bestimmten zu jeder Zeit noch hinzugefügt werden müssen, um am gegebenen System die gegebene Bewegung hervorzurufen.

Werden die Kräfte  $\mathfrak{P}_h$  von äußern Vorrichtungen auf das System ausgeübt, so sind dagegen  $-\mathfrak{P}_h$  die Kräfte, welche umgekehrt das System auf jene Vorrichtungen ausübt.

Helmholtz hat eine Verallgemeinerung des Prinzips der stationären Wirkung gefunden, welche, weil sie in der Elektrodynamik Anwendung findet, hier noch erwähnt werden soll.

Er betrachtet  $2s$  vollkommen independente Variablen  $p_1, p_2 \dots p_s, p'_1, p'_2 \dots p'_s$ , welche im Verlaufe einer gegebenen Zeit (von  $t_0$  bis  $t_1$ ) beliebige, sich kontinuierlich folgende Werte durchlaufen sollen, so daß also jetzt von vornherein gar nicht vorausgesetzt ist, daß  $p'_h$  der Differentialquotient von  $p_h$  nach der Zeit ist.  $T$  sei eine beliebig gegebene Funktion der  $2s$  Variablen  $p_1 p_2 \dots p_s, p'_1 \dots p'_s$ , jedoch sei es bezüglich der  $p'$  eine ganze Funktion zweiten Grades, also durch einen Ausdruck von der Form 35) gegeben. Zwischen den  $s+1$  Variablen  $t, p_1, p_2 \dots p_s$  können noch  $\sigma$  holonome oder nicht holonome Bedingungsgleichungen von der Form  $\pi^i dt + \sum_1^s \pi_h^i dp_h = 0$  bestehen.  $V$  und die  $\pi$  seien beliebig gegebene Funktionen dieser  $s+1$  Variablen.

Er stellt nun die Forderung, daß die Größe

$$221) \quad \Omega = \int_{t_0}^{t_1} \left[ T - V - \sum_1^s \left( p'_h - \frac{dp_h}{dt} \right) \frac{\partial T}{\partial p'_h} \right] dt$$

ein Grenzwert sein soll unter folgenden Bedingungen: 1.  $t_0$  und  $t_1$  und die Werte der ungestrichenen  $p$  zu diesen Zeiten sollen nicht variiert werden, so daß man auch  $dt$  nicht zu variieren braucht, 2. die Variationen der ungestrichenen  $p$  sollen die Bedingungen erfüllen  $\sum_1^s \pi_h^l \delta p_h = 0$ ,  $l = 1, 2 \dots s$ .

Da die gestrichenen  $p$  völlig unabhängig sind, so muß die Variation  $\delta_i \Omega$ , welche  $\Omega$  erfährt, wenn man sonst alles unverändert läßt und nur eines der  $p'$ , z. B.  $p'_i$ , um  $\delta p'_i$  wachsen läßt, verschwinden. Die im Ausdrucke für  $\Omega$  in der ockigen Klammer stehende Summe erfährt dann den Zuwachs

$$\delta p'_i \frac{\delta T}{\delta p'_i} + \sum_1^s \left( p'_h - \frac{dp_h}{dt} \right) \frac{\delta T}{\delta p'_h \delta p'_i} \delta p'_i$$

und daher wird:

$$\delta_i \Omega = \int_{t_0}^{t_1} \delta p'_i dt \sum_1^s \left( p'_h - \frac{dp_h}{dt} \right) \frac{\delta^2 T}{\delta p'_h \delta p'_i};$$

da nun  $\delta p'_i$  eine ganz willkürliche kontinuierliche Funktion von  $t$  ist, die nur die Bedingung zu erfüllen hat, daß sie für jeden Wert des  $t$  unendlich klein sein muß, so muß der Faktor von  $\delta p'_i$  in dem zuletzt für  $\delta_i \Omega$  gefundenen Ausdrucke für jedes  $t$  verschwinden und man hat daher für jedes  $t$  und  $i = 1, 2 \dots s$ :

$$222) \quad \sum_1^s \left( p'_h - \frac{dp_h}{dt} \right) \frac{\delta^2 T}{\delta p'_h \delta p'_i} = 0.$$

Dies sind für die  $s$  Größen  $p'_h - \frac{dp_h}{dt}$  im ganzen  $s$  lineare homogene Gleichungen. Da nach Gleichung 35)  $\frac{\delta^2 T}{\delta p'_h \delta p'_i} = a_{hi}$  ist, so sind die Koeffizienten dieser linearen Gleichungen gleich den  $a_{hi}$ , und da nach 56) die Determinante dieser Koeffizienten nicht verschwindet, so können die sämtlichen linearen Gleichungen 222) nur erfüllt sein, wenn sämtliche Ausdrücke von der Form  $p'_h - \frac{dp_h}{dt}$  verschwinden. Der in § 9 für das Nichtverschwinden dieser Determinante gegebene

Beweis gilt auch für rheonome generalisierte Koordinaten; denn man kann sich immer denken, daß die zwischen den rechtwinkligen und generalisierten Koordinaten zu einer bestimmten Zeit bestehenden Beziehungen unabhängig von der Zeit fortbestehen. Dann werden die generalisierten Koordinaten skleronom, ohne daß die  $\alpha$  ihre Werte ändern.

Lediglich aus der Voraussetzung, daß der Ausdruck 221) unter den soeben präzisierten Bedingungen ein Grenzwert wird, folgt also, was früher Definition der  $p'_h$  war, daß  $p'_h = \frac{d p_h}{d t}$  ist. Sobald aber dies bewiesen ist, wird der Ausdruck  $\Omega$  der Gleichung 221) mit dem Ausdruck  $W$  der Gleichung 202) identisch, und da auch die Bedingungen, unter denen jetzt  $\Omega$  ein Grenzwert werden soll, identisch sind mit denen, unter denen früher  $W$  ein Grenzwert wurde, so folgt, wie damals so auch jetzt, daß die zeitliche Veränderung der  $p$ , für welche  $\Omega$  ein Grenzwert wird, die Lagrangeschen Gleichungen der analytischen Mechanik erfüllt.

### § 35. Das Wirkungsprinzip als Grundprinzip der gesamten Naturwissenschaft.

Historisch führte natürlich offener oder versteckter die Vorstellung der Zentrikräfte zwischen materiellen Punkten zur allmählichen Entwicklung der Mechanik in ihrer heutigen Gestalt. Daraus allein darf man freilich noch nicht den Schluß ziehen, daß diese Vorstellung deswegen auch immer ihre Basis bleiben müsse. Es kommt ja oft genug vor, daß ein Satz, der zuerst unter gewissen beschränkenden Bedingungen gefunden wurde, sich später auch in allgemeineren Fällen als gültig erweist. So könnten die Prinzipien der Mechanik, wie das der virtuellen Verschiebungen oder das der stationären Wirkung, ebenfalls unter Bedingungen gelten, welche sich nicht durch Zentrikräfte realisieren lassen.

Es wurde in der Tat oft die Ansicht ausgesprochen, daß man die Vorstellung der Zentrikräfte ganz fallen lassen und an ihre Stelle irgend eines der allgemeinen Prinzipie

zur Basis der Mechanik machen solle. Wählt man hierzu das Energioprinzip, so muß man, da dieses viel spezieller ist, als die Gleichungen der Mechanik, noch eine ganze Reihe anderer Sätze hinzunehmen und mit der Ableitung des Gesamtmaterials aus einem einheitlichen Prinzipio ist es wiederum vorbei. Dies wäre nicht notwendig, wenn man das Prinzip der stationären Wirkung wählen würde, da aus diesem in der Tat die Gleichungen der Mechanik in ihrer Gesamtheit folgen.

Es kann hier sogar der Fall ins Auge gefaßt werden, daß der Zustand von Systemen durch andere Koordinaten bestimmt ist, als solche, welche die Lage in einem dreidimensionalen Raume angeben. So haben z. B. Gibbs, Helmholtz u. a. Relationen aufgestellt, in denen die Temperatur, der elektrische Zustand und ähnliche Variablen vorkommen und welche die mechanischen Prinzipio, besonders das Prinzip der stationären Wirkung, als spezielle Fälle enthalten. Allein diese Relationen sind in anderer Hinsicht doch wieder viel weniger allgemein. Sie gelten manchmal ausschließlich für Zustände, die sich nur unendlich wenig vom Gleichgewichtszustande unterscheiden. Sie enthalten ferner der Mechanik fremde Dunkelheiten, wie den Begriff der Entropie, der Irreversibilität und zahlreiche erfahrungsmäßig gegebene Eigenschaften der Temperatur, Elektrizität etc., deren Vorstellung keineswegs so einfach ist, wie die der geometrischen Beziehungen von Punkten.

Es besteht die Möglichkeit, das Auftreten von Gleichungen, welche denen der Mechanik analog sind, in der Theorie der Elektrizität, der Wärme etc., sowie die besonderen Eigenschaften, welche den in diesen Theorien vorkommenden Größen zukommen, daraus zu erklären, daß diese Phänomene durch verborgene mechanische Bewegung verursacht sind und auch die Dunkelheiten im Verhalten der in der übrigen Physik vorkommenden Größen durch mechanische Bilder aufzuheben, z. B. die der Entropie- und Irreversibilitätsbegriffes durch Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das Verhalten sehr zahlreicher materieller Punkte.

Wenn ich sage, die mechanischen Bilder könnten imstande sein, derartige Dunkelheiten aufzuheben, so meine ich damit nicht, daß die Lage und Bewegung materieller Punkte im Raume etwas wäre, dessen einfachste Elemente vollständig erklärbar sind. Im Gegenteile, die letzten Elemente unserer Erkenntnis zu erklären ist überhaupt nicht möglich; denn erklären heißt ja, auf Bekannteres, Einfacheres zurückführen und daher muß das, worauf alles zurückgeführt wird, immer unerklärbar bleiben. Wenn daher auch alles aus den einfachsten Grundbegriffen der Mechanik erklärt wäre, so würden diese dafür in aller Ewigkeit geradeso unerklärbar bleiben, wie es heute für uns auch die der Elektrizitätslehre sind.

Auch will ich nicht streiten, ob der Begriff der Lage im Raume, oder der der Temperatur, oder der einer elektrischen Ladung an sich klarer ist: ein solcher Streit wäre gegenstandslos. Nur wäre es sicher klarer, wenn wir nicht nur alle Bewegungserscheinungen an festen, tropfbaren und gasförmigen Körpern, sondern auch Wärme, Licht, Elektrizität, Magnetismus, Gravitation, alles durch die Vorstellung von Bewegungen materieller Punkte im Raume, also durch ein einziges einheitliches Prinzip erklären könnten, als wenn wir für jedes dieser Agentien wieder ein ganzes Inventar vollkommen fremdartiger Begriffe wie Temperatur, elektrische Ladung, Potential etc. brauchen, ob wir diese fremdartigen Begriffe nun als etwas vollkommen Selbständiges oder als lauter disparate für jede Energieform apart zu postulierende Energiefaktoren bezeichnen mögen.

Wenn man sich schon überhaupt um die künftigen Jahrhunderte oder gar Jahrtausende kümmern will, so will ich gerne zugeben, daß es vermessen wäre, zu hoffen, daß das heutige mechanische Weltbild selbst nur in seinen wesentlichsten Zügen sich in alle Ewigkeit erhalten werde.

Daher bin ich auch weit entfernt, von Versuchen, allgemeine Gleichungen zu suchen, von denen die mechanischen nur spezielle Fälle sind, gering zu denken. Ja ich wäre mit dem Erfolge dieses Buches zufrieden, wenn ich durch



den Nachweis, wie klar ein Weltbild sein kann und muß, dazu beigetragen hätte, daß die Konstruktion eines anderen noch umfassenderen und klareren Weltbildes, sei es auf Grundlage des Energieprinzips oder des Prinzips der stationären Wirkung oder der geradesten Bahn, gelänge. Nur dem Leichtsinne, welcher, bevor ein anderes derartiges Weltbild von der ersten Grundlage bis zur Anwendung auf die wichtigsten Erscheinungen, die schon so lange durch das alte Weltbild erschöpfend dargestellt worden sind, detailliert ausgearbeitet vorliegt, ja ohne von den Schwierigkeiten der Konstruktion desselben eine Ahnung zu haben, das alte Weltbild der Mechanik für einen überwundenen Standpunkt erklärt, möchte ich entgegenarbeiten. Vor allem dürfte man, wenn man das Bild materieller Punkte vermeiden will, nicht doch wieder in der Mechanik später materielle Punkte einführen, sondern man müßte von anders beschaffenen Einzelwesen oder Elementen<sup>1)</sup> ausgehen, deren Eigenschaften so klar wie die der materiellen Punkte zu schildern wären.

Ich schrieb das Vorstehende vor etwa sieben Jahren nieder, der Schlußsatz stellt also die von mir vor sieben Jahren gestellte Forderung dar (so alt ist der Grundstock des Manuskripts für das vorliegende Buch). Ich brachte alles das jetzt absichtlich unverändert zum Abdrucke. Was ich dort nach Jahrhunderten oder gar Jahrtausenden erwartete, ist in sieben Jahren zur Hälfte geschehen.

Aber nicht von der Energetik, nicht von der Phänomenologie ging der Hoffungsstrahl einer nichtmechanischen Naturerklärung aus, sondern von einer Atomtheorie, die in phantastischen Hypothesen die alte Atomtheorie ebenso übertrifft, wie ihre Elementargebilde an Kleinheit die alten Atome übertreffen. Ich brauche nicht zu sagen, daß ich die moderne Elektronentheorie meine. Diese strebt gewiß nicht die Begriffe der Masse und Kraft, das Trägheitsgesetz etc. aus Einfacherem, leichter Verständlichem zu erklären, ihre einfachsten Grundbegriffe und Gesetze werden sicher ebenso

---

<sup>1)</sup> Vergl. Wied. Ann. Bd. 60, S. 247, 1897.

unerklärlich bleiben, wie für das mechanische Weltbild die der Mechanik. Aber der Vorteil, die gesamte Mechanik aus anderen, für die Erklärung des Elektromagnetismus ohnehin notwendigen Vorstellungen ableiten zu können, wäre ebenso groß, als wenn umgekehrt die elektromagnetischen Erscheinungen mechanisch erklärt werden könnten. Möge das erstere gelingen und dabei meine vor sieben Jahren gestellte Forderung erfüllt werden!

### § 36. Das Prinzip der kleinsten Wirkung.

Wir wollen nun annehmen, daß weder die Kraftfunktion  $V$  noch die Bedingungsgleichungen, die nun alle holonom sein sollen, die Zeit explizit enthalten d. h. daß das System skleronom sei. Dann braucht man  $t_0$  nicht zu variieren, da man ohne Beschränkung der Allgemeinheit der unteren Grenze des auf die unvariierte Bewegung bezüglichen Integrales 202) die untere Grenze des der variierten Bewegung entsprechenden Integrales 203) zuordnen kann.  $\delta t_1$  ist dann die Variation der ganzen Zeit  $t_1 - t_0$ , über welche die Integration sich erstreckt. Ferner ist dann in der Gleichung der lebendigen Kraft

$$E = T + V,$$

$E$  eine während der unvariierten Bewegung konstante Größe; daher wird

$$W = \int_{t_0}^{t_1} (2T - E) dt$$

$$\delta W = 2\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt - \int_{t_0}^{t_1} \delta E dt - E \delta t_1,$$

wogegen aus Gleichung 207) folgt:

$$\delta W = -E \delta t_1 + \sum_h (q_h^1 \delta p_h^1 - q_h^0 \delta p_h^0).$$

Die Vergleichung dieser beiden Werte für  $\delta W$  ergibt:

$$223) \quad 2\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta E dt + \sum_h (q_h^1 \delta p_h^1 - q_h^0 \delta p_h^0).$$

Wir wollen zunächst das Prinzip der kleinsten Wirkung in seiner alten historischen Form ableiten. Wir setzen dabei voraus, daß das Intervall  $t_1 - t_0$ , über welches sich das Integral (202) erstreckt, den Zuwachs  $\delta t_1$  erfährt, und dies ist ein wesentlicher Unterschied von dem früher behandelten Principe der stationären Wirkung, wo dieses Zeitintervall unverändert blieb. Ferner setzen wir voraus, daß die der unteren Gränze  $t_0$  entsprechenden Werte der Koordinaten für die variierte Bewegung dieselbe wie für die unvariierte sind, daß also  $\delta p^0_h$  für jedes  $h$  verschwindet. Die Geschwindigkeiten für die Zeit  $t_0$ , bei welcher sowohl für die unvariierte als auch für die variierte Bewegung die Integration beginnt, können zwar Variationen erfahren, jedoch nur so, daß die gesamte lebendige Kraft  $T_0$  im Zeitmomente  $t_0$  keine Veränderung erfährt, daß also die Konstante  $A$  unverändert bleibt. Ferner sollen alle Zusatzkräfte, welche noch eine weitere Variation der Bewegung bewirken, in keinem Zeitmomente eine Arbeit auf das materielle System übertragen oder ihm entziehen. Es soll daher für die variierte Bewegung  $T + V$  zu Anfang denselben Wert  $E$  wie für die unvariierte Bewegung haben und auch zu allen späteren Zeiten soll die gesamte Energie  $T + V$  für die variierte Bewegung denselben Wert  $E$  wie zu Anfang haben. Da aber auch für die unvariierte Bewegung  $T + V = E$  ist, so ist allgemein  $\delta E = 0$ .

Dies wäre z. B. erfüllt, wenn die Zusatzkräfte dadurch bewirkt würden, daß jeder materielle Punkt in eine starre glatte Röhre eingeschlossen würde, deren Mittellinie unendlich wenig von der unvariierten Bahn des betreffenden materiellen Punktes abweiche und durch die Punkte ginge, wo sich der Punkt zu den Zeiten  $t_0$  und  $t_1$  bei der unvariierten Bewegung befand. Außerdem soll die Variation der für die Zeit  $t_0$  geltenden Geschwindigkeiten und sollen die Zusatzkräfte noch so beschaffen sein, daß zu irgend einer Zeit  $t_1 + \delta t_1$ , welche gleich  $t_1$  oder unendlich wenig verschieden von  $t_1$  ist, sämtliche materielle Punkte genau in die Lage kommen, die sie für die unvariierte Bewegung zur Zeit  $t_1$  hatten. Dann ist auch  $\delta p^1_h = 0$  für jedes  $h$  und es folgt aus Gleichung (223)

$$224) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 0.$$

Es wird also das Integral  $\int_{t_0}^{t_1} T dt$  ein Grenzwert, welche Aussage das alte Prinzip der kleinsten Wirkung, wie es schon lange vor Hamilton ausgesprochen wurde, bildet. Dasselbe ist nur für den Fall, daß man die Zeit  $t_1 - t_0$  also nach unserer Methode neben  $t_0$  auch  $t_1$  unvariirt läßt, ein spezieller Fall des Prinzips der stationären Wirkung.

§ 37. Variationsmethode, wobei auch die Independenten, resp. die Zeit variirt wird.

Die alte Ableitungsweise des Prinzips der kleinsten Wirkung, welcher auch wir im vorigen Paragraph gefolgt sind, setzt voraus, daß eine Kraftfunktion existiert, welche die Zeit nicht explizit enthält. Diese Voraussetzung war bei Ableitung der Gleichung 30) resp. 218a), welche den allgemeinsten Ausdruck des Prinzips der stationären Wirkung darstellt, nicht notwendig. Es hat Helmholtz gezeigt, daß sie auch bei Ableitung des Prinzips der kleinsten Wirkung nicht notwendig ist und daß daher aus letzterem Principe die allgemeinen Grundgleichungen der Mechanik für skleronome Koordinaten in allen Fällen abgeleitet werden können, in denen sie aus Gleichung 4), 30) resp. 218a) (der allgemeinsten Form des Prinzips der stationären Wirkung) abgeleitet werden können.

Ehe ich aber hierzu übergehe, will ich noch eine ungemein wichtige Verallgemeinerung der Variationsmethode besprechen. Ich habe absichtlich bisher die Variation des Zeitdifferentials unterlassen, um zu zeigen, wie sie durch Variation der Grenzen ersetzt werden kann. Wiewohl wir nun auch in den spätern Paragraphen nirgends mehr das Zeitdifferential variiren werden, so will ich diese Variation doch in diesem Paragraph besprechen, da ohne ihre Kenntnis der ganze Begriff der Variationsrechnung ein ungemein beschränkter bliebe.

Gerade bei Ableitung des Prinzips der kleinsten Wirkung ist es natürlicher auch  $dt$  als variabel zu betrachten, d. h. die Annahme fallen zu lassen, daß zwei Zustände der unvariirten Bewegung jedesmal zeitlich gleich weit abstoßen, wie die beiden korrespondierenden Zustände der variirten Bewegung.

Es drückt dann das einer Größe vorgesetzte  $\delta$  immer den Zuwachs aus, welchen diese Größe erfährt, wenn man von dem irgend einer Zeit  $t$  entsprechenden Zustande der unvariirten Bewegung zu dem korrespondierenden Zustande der variirten übergeht, d. h. zu dem, welcher bei der variirten Bewegung einer ein wenig davon verschiedenen Zeit  $t + \delta t$  entspricht. Dabei kann man  $\delta t$  ganz beliebig wählen, also z. B. als eine ganz beliebige Funktion von  $t$  auffassen, welche nur kontinuierlich und unendlich klein von der Ordnung der  $\delta$  der übrigen Größen sein muß.

Am einfachsten ist es natürlich allgemein  $\delta t = 0$  zu setzen, wie wir es im früheren thaten; aber es können Gründe vorhanden sein, weshalb die Einführung eines von Null verschiedenen, irgendwie passend gewählten Wortes von  $\delta t$  rascher zum Ziele führt. Wir bleiben also vorläufig ganz allgemein und legen dem  $\delta t$  weiter gar keine Beschränkung auf, als daß es kontinuierlich und unendlich klein von der Ordnung der  $\delta$  der übrigen Größen sein soll.

Um den Unterschied zwischen der Variation bei Konstanthaltung der independenten Variablen und der Variation, bei der auch die independente variiert wird, noch deutlicher hervortreten zu lassen, will ich hier eine kurze Einschaltung über die Grundprinzipien der Variationsrechnung im allgemeinen machen. Dieselbe soll nur unzusammenhängende Bruchstücke ohne jede subtile mathematische Analyse bloß zur Beleuchtung der geometrischen und physikalischen Bedeutung der betreffenden Begriffe geben. Sie soll auch keine Einleitung zum Studium der Variationsrechnung sein, sondern nur etwa zum Nebengebrauche beim Studium eines elementaren Lehrbuches über Variationsrechnung von einigem Nutzen sein. Erst nach Absolvierung dieser Einschaltung

will ich wieder zu unserer mechanischen Aufgabe zurückkehren.

Das einfachste Problem der Variationsrechnung ist das folgende: Man sucht eine Funktion  $y = f(x)$  einer independenten Variablen  $x$  so zu bestimmen, daß ein Integral von der Form:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')$$

ein Grenzwert wird. Dabei ist  $y' = \frac{dy}{dx}$ .  $x_0$  und  $x_1$  sind die konstant gegebenen oder in gegebener oder willkürlicher Weise veränderlichen Grenzen des Integrales.

In der Variationsrechnung denkt man sich nun die Funktion  $f$ , für welche der geforderte Grenzwert eintritt, gefunden und durch eine Kurve  $MN$  (Fig. 3, 4, 5) dargestellt. Dann denkt man sich die Funktion  $f$  unendlich wenig variiert, so daß eine unendlich benachbarte Kurve  $M'N'$  entsteht. Man läßt nun jedem Punkte der unvariirten Kurve  $MN$  einen Punkt der variierten Kurve  $M'N'$  korrespondieren und bezeichnet die Zuwächse, welche Abszisse und Ordinate des betreffenden Punktes erfahren, wenn man von irgend einem Punkte der unvariirten Kurve  $MN$  zu dem diesem Punkte korrespondierenden Punkte der variierten Kurve  $M'N'$  übergeht, mit  $\delta x$ ,  $\delta y$ .

Am einfachsten und in den meisten Fällen am besten ist es, wenn man jedem Punkte der unvariirten Kurve denjenigen Punkt der variierten Kurve korrespondieren läßt, welcher vertikal darüber liegt, also dieselbe Abszisse hat. Dann ist allgemein  $\delta x = 0$ , weil korrespondierende Punkte immer

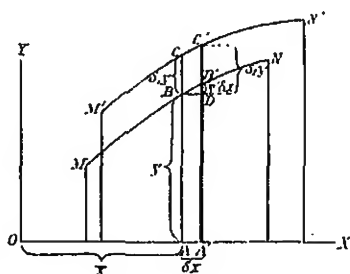


Fig. 8.

dieselbe Abszisse haben.  $\delta y$  aber, welches wir in diesem Falle als  $\delta_1 y$  bezeichnen wollen, ist gleich der Ordinaten-

differenz der beiden Punkte, in denen eine der Ordinatenachse parallele Gerade die beiden Kurven durchschneidet.  $BC$  in Fig. 3 wäre das  $\delta_1 y$ , wenn  $B$  der fragliche Punkt der unvariirten Kurve,  $C$  der ihm korrespondierende Punkt der variirten Kurve ist.

Es kann sich aber auch aus gewissen Gründen empfehlen, jedem Punkte der unvariirten Kurve mit der Abszisse  $x$  einen Punkt der variirten Kurve korrespondieren zu lassen, welche eine ein wenig verschiedene Abszisse  $x + \delta x$  hat, wobei man für  $\delta x$  eine beliebige Funktion von  $x$  wählen kann. Das  $\delta x$  des Punktes  $B$  in Fig. 3 sei durch das Stück  $AA'$  dargestellt. Dann ist das dazu gehörige  $\delta y$ , das in diesem Falle mit  $\delta_2 y$  bezeichnet worden soll, der Zuwachs, welchen die Ordinate erfährt, wenn man von dem Punkte  $B$  der unvariirten Kurve  $MN$ , der die Abszisse  $x$  hat, zu dem korrespondierenden Punkte  $C'$  der variirten Kurve  $M'N'$ , also zu demjenigen Punkte dieser Kurve übergeht, welcher die Abszisse  $x + \delta x$  hat. In Fig. 3 ist  $C'D$  gleich  $\delta_2 y$ .  $dy$  dagegen ist immer der Zuwachs, welchen die Ordinate der unvariirten Kurve erfährt, wenn man bei derselben die Abszisse  $x$  um  $dx$  wachsen läßt; die variirte Kurve kommt dabei gar nicht in Betracht.

In Fig. 4 sei  $AA_1 = dx$ ,  $BB_1 = dy$ . Unter  $d\delta y = \delta dy$  endlich versteht man den Zuwachs, den das  $\delta y$  erfährt,

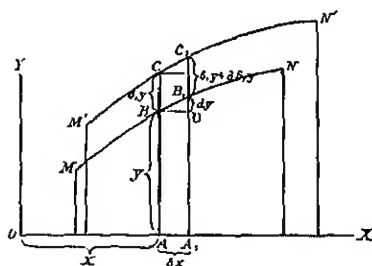


Fig. 4.

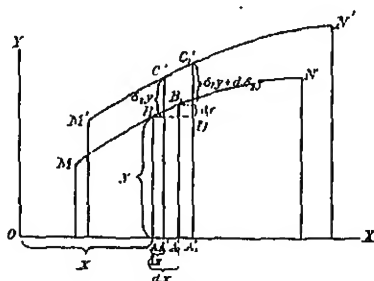


Fig. 5.

wenn man es als Funktion von  $x$  ausdrückt und in dieser Funktion  $x$  um  $dx$  wachsen läßt oder den  $dy$  erfährt, wenn man von den beiden Punkten  $B$  und  $B_1$  Fig. 4 u. 5, deren

Ordinatendifferenz gleich  $dy$  ist, zu den beiden ihnen korrespondierenden Punkten ( $CC_1$  in Fig. 4,  $C' C'_1$  in Fig. 5) der variirten Bewegung übergeht. In Fig. 4 sind alle diese Größen für den Fall dargestellt, daß  $\delta x = 0$  ist, in Fig. 5 dagegen für den Fall, daß  $\delta x$  von Null verschieden ist. Im ersten Falle soll das  $d\delta y$  mit  $d\delta_1 y$ , im letzteren mit  $d\delta_2 y$  bezeichnet werden.

Die Analogie der beiden hier betrachteten Variationsarten mit den soeben in der Mechanik angewandten liegt, wie ich glaube, klar zutage. Nur daß in der Mechanik  $t$  statt  $x$  die independente Variable und statt der dependenten Variablen  $y$  eine ganze Reihe von Variablen vorhanden ist. Man könnte sich bei dem mechanischen Probleme die Verhältnisse in derselben Weise versinnlichen, wenn man die Werte des  $t$  als Abszissen und die Werte irgend einer der Koordinaten oder generalisirten Geschwindigkeiten oder Momente als Ordinaten darüber auftragen würde.

Dies ist es, was ich über Variationsrechnung im allgemeinen einschalten wollte und wir kehren nun wieder zur mechanischen Aufgabe zurück.

### § 38. Über die Verallgemeinerungen, welche Helmholtz dem Principe der kleinsten Wirkung erteilte.

Wir wollen also nun auch  $t$  der Variation unterwerfen. Sein Zuwachs heiße  $\delta t$ , d. h. wir lassen dem zur Zeit  $t$  stattfindenden Zustande der unvariirten Bewegung den zur Zeit  $t + \delta t$  gehörenden Zustand der variirten Bewegung korrespondieren. Wir bleiben dabei in diesem Paragraph, wie schon bemerkt, ganz allgemein, d. h. wir legen dem  $\delta t$  sonst gar keine Beschränkung auf, als daß es eine kontinuierliche Funktion von  $t$  und unendlich klein von der Ordnung der  $\delta$  der übrigen Größen sein soll.

Wir verfahren nun in der nachstehenden Weise. Wir bilden uns den Ausdruck

$$225) \quad \int_{t_0}^{t_1} [2T\delta dt + \delta T dt + \sum_1^n P_h \delta p_h dt].$$



Diesen Ausdruck transformieren wir in der folgenden Weise. Wir ersetzen das erste Glied des Ausdrucks in der eckigen Klammer durch

$$\sum_1^s q_h p'_h \delta dt,$$

(was skleronome Koordinaten voraussetzt), das zweite durch:

$$\sum_1^s q_h \delta p'_h dt + \sum_1^s \frac{\partial T'}{\partial p_h} \delta p_h dt.$$

Die Summe dieser beiden Glieder reduziert sich dann auf:

$$226) \quad \sum_1^s q_h \delta(p'_h dt) + \sum_1^s \frac{\partial T'}{\partial p_h} \delta p_h dt.$$

Nun ist aber  $p'_h dt = dp_h$ , daher:

$$\delta(p'_h dt) = \delta dp_h = d\delta p_h.$$

Hieraus folgt:

$$227) \quad \sum q_h \delta(p'_h dt) = \sum_1^s q_h \frac{d\delta p_h}{dt} dt.$$

Integriert man jedes Glied der letzteren Summe, wie wir es früher schon öfters taten, per partes, substituiert den so aus 227) erhaltenen Ausdruck in den nach 226) integrierten Ausdruck, dann diesen statt der beiden ersten Glieder des Ausdrucks 225) in diesen Ausdruck, und bedenkt noch, daß kraft der Bewegungsgleichungen, weil die unvariirte Bewegung eine natürliche sein soll,

$$\sum_1^s \left( -\frac{dq_h}{dt} + \frac{\partial T}{\partial p_h} + P_h \right) \delta p_h = 0$$

ist und zwar sowohl, wenn keine, als auch wenn Bedingungsgleichungen vorhanden sind, so findet man:

$$228) \quad \int_{t_0}^{t_1} [2T\delta dt + (\delta T + \sum_1^s P_h \delta p_h) dt] = \sum_1^s (q_h^1 \delta p_h^1 - q_h^0 \delta p_h^0).$$

Diese Gleichung umfaßt das Prinzip der stationären und das der kleinsten Wirkung; es ist vorausgesetzt, daß die generalisierten Koordinaten skleronom sind.<sup>1)</sup>

1. Falls  $\delta dt = 0$  ist, folgt, da wir die Integrationsgrenzen nicht variieren, wieder das Hamiltonsche Prinzip recte das Prinzip der stationären Wirkung.

2. Wenn die Variationen der Koordinaten für die Integrationsgrenzen verschwinden und außerdem die Variation speziell so ausgeführt wird, daß überall

$$229) \quad \delta T = \sum_1^s P_h \delta p_h,$$

also der Zuwachs der lebendigen Kraft immer gleich der durch Variation der Koordinaten geleisteten Arbeit ist, so daß die die Variation erzeugenden Zusatzkräfte niemals

Arbeit leisten, so ist  $\int_{t_0}^{t_1} 2 \delta(T dt) = 0$ , daher auch

$$230) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 0;$$

denn die Variation der Grenzen ist hier schon durch Variation des Zeitdifferentialen berücksichtigt.

Falls  $\delta T - \sum_1^s P_h \delta p_h$  nicht die Variation eines Ausdrucks ist, der für endliche Teile der unvariirten Bewegung konstant ist, kann man sich vorstellen, daß die Bedingung 229) sich bloß darauf bezieht, welche Momente der variirten Bewegung man den verschiedenen Momenten der unvariirten korrespondieren läßt, so daß durch die Bedingung 229) der ganze Verlauf der variirten Bewegung in keiner Weise beschränkt wird, diese Bedingung vielmehr bloß die beiden Punkte bestimmt, welche für die variirte Bewegung als Anfangspunkt und Endpunkt der Integration gewählt werden

<sup>1)</sup> Falls die Zeit variirt wird, folgt aus dem Verschwinden der Variationen der rechtwinkligen Koordinaten an beiden Zeitgrenzen keineswegs auch das Verschwinden der Variationen irgend welcher nicht skleronom generalisierter Koordinaten an denselben Zeitgrenzen. Ersteres kann dann nichtholonomen Bedingungen widersprechen.

müssen. Für Anfang und Ende der Integration müssen dann noch die Koordinatenvariationen verschwinden. Denn da wir die Grenzen des Integrals nicht variiert haben, so muß der Zustand der unvariierten Bewegung, welche für diese die untere Integrationsgrenze bildet, dem Zustande korrespondieren, welcher für die variierte Bewegung die untere Integrationsgrenze bildet und dasselbe muß für die oberen Integrationsgrenzen gelten.

Dies wird besonders klar, wenn eine Kraftfunktion  $V$  existiert, welche aber die Zeit explizit enthält. Setzt man dann  $T + V = E$ , so ist:

$$\delta T - \sum_h P_h \delta p_h = \delta E.$$

Da aber  $V$  und folglich auch  $E$  die Zeit explizit enthalten, so durchläuft  $E$  sowohl für die unvariierte als auch für die variierte Bewegung eine Reihe kontinuierlich sich folgender Werte. Hat dann  $E$  nicht gerade für eine der Integrationsgrenzen ein Maximum oder Minimum, so kann die Bedingung (229) dahin ausgesprochen werden, daß der Anfangszustand der variierten Bewegung dort gewählt werden muß, wo für die variierte Bewegung  $E$  denselben Wert hat, den es für den Anfangszustand der unvariierten Bewegung hat und daß dasselbe auch für die Endzustände, d. h. für die oberen Grenzen der Integrale entsprechenden Zustände gelten muß. Eine bestimmte Angabe, wie variiert werden muß, liegt dann noch darin, daß für die beiden Integrationsgrenzen die Variationen sämtlicher Koordinaten verschwinden müssen.

Es genügt dann überhaupt, abgesehen von den Stellen, wo  $E$  einen Grenzwert hat und vorausgesetzt, daß die Koordinatenvariation für die Integrationsgrenzen verschwinden, jedem Zustande der unvariierten Bewegung denjenigen der variierten korrespondieren zu lassen, wo  $E$  exakt denselben Wert hat, geradeso wie beim Prinzip der stationären Wirkung solche Zustände korrespondierten, für welche  $t$  exakt denselben Wert hat. Letztere Vorstellung ist uns so natürlich, da  $t$  niemals ein Maximum oder Mini-

mum haben oder gar für eine endliche Strecke konstant sein kann; erstere Vorstellung ist uns unnatürlich, weil gerade für die wichtigsten Fälle  $E$  während der ganzen unvariirten und auch während der variirten Bewegung konstant ist. Hat es für beide Bewegungen denselben konstanten Wert, so ist in richtiger Weise variirt, allein dies ist nicht durch die Art und Weise bewirkt, wie sich die Zustände korrespondieren. Hat dagegen  $E$  für beide Bewegungen unendlich wenig verschiedene Werte, so kann dies durch keine Art der Zuordnung der Zustände gutgemacht werden.

**§ 39. Jacobis Beleuchtung des Sinnes des Prinzipes der kleinsten Wirkung. Einfaches Beispiel für den Unterschied zwischen dem Prinzipie der stationären und dem der kleinsten Wirkung.**

Es sei hier noch eines Umstandes erwähnt, auf den namentlich Jacobi großes Gewicht legt. Es soll die Variation der Koordinaten für beide Integrationsgrenzen verschwinden und es soll eine Kraftfunktion existieren, welche für die unvariirte und die variirte Bewegung die gleiche die Zeit nicht enthaltende Funktion der Koordinaten ist. Außerdem sollen die generalisirten Koordinaten skleronom sein. Dann besteht für beide Bewegungen die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$T + V = \text{konst.} = E.$$

Der Wert dieser Größe  $E$ , welche jetzt als eine gegebene Konstante zu betrachten ist, soll nun beim Übergange von der unvariirten zur variirten Bewegung auch keine Änderung erfahren.

Da nach Gleichung 35)

$$281) \quad 2T = \sum_1^i a_h \sum_1^i a_h \frac{dp_h}{dt} \frac{dp_h}{dt}$$

ist, so folgt:

$$232) \quad dt = \frac{1}{\sqrt{2(E-V)}} \sqrt{\sum_h^s \sum_k^s a_{hk} dp_h dp_k}.$$

Unter den angegebenen Umständen muß nach Gleichung 224)

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 0$$

sein, was nach Gleichung 231) übergeht in

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_h^s \sum_k^s a_{hk} \frac{dp_h}{dt} dp_k = 0.$$

Da hier die Zeit, bei welcher die Integration beginnt, und ebenso die, wo sie endet, beliebig variieren können, und außerdem die Zeit in dem Integrale sonst in keiner Weise vorkommt, als daß  $dt$  im Nenner von  $\frac{dp_h}{dt}$  steht, so kann man für  $dt$  seinen Wert aus Gleichung 232) einsetzen und erhält

$$233) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\sqrt{2(E-V)}} \sqrt{\sum_h^s \sum_k^s a_{hk} dp_h dp_k} = 0.$$

Die Grenzen des Integrals bedeuten hier, daß von den gegebenen Anfangswerten der Koordinaten zu den ebenfalls gegebenen Endwerten derselben zu integrieren ist. Die Zeit ist da vollständig eliminiert. Die Gleichung 233) drückt also nur eine geometrische Bedingung für die Bahn des materiellen Systems aus, d. h. sie bestimmt die Bahnform für jeden einzelnen Punkt, und welche Punkte aller Bahnen aller materiellen Punkte zusammengehören, d. h. zu einer und derselben Zeit gehörige Lagen der materiellen Punkte darstellen.

Diese „Bahn des materiellen Systems“ wird dahin bestimmt, daß unter Einhaltung der Bedingungsbedingungen die Variation 233) verschwinden muß. Wie aber diese Bahnen im Verlaufe der Zeit zurückgelegt werden, d. h. welcher Wert des  $t$  zu jeder geometrischen Konfiguration der Punkte gehört, wird durch die Gleichung 233) nicht

bestimmt, sondern vielmehr durch Integration der Gleichung 232).

Da im Integrale der Gleichung 233) die Zeit gar nicht enthalten ist, so kann man sie nicht als independente Variable wählen. Wollte man in diesem Integrale durchaus eine bestimmte independente Variable haben, so könnte man eine der Koordinaten, z. B.  $p_1$ , als solche wählen und die Gleichung 233) schriebe sich in der Form

$$\delta \int_{p_0}^{p_1} \frac{d p_1}{V E} - \sqrt{\sum_1^n \sum_1^n a_{hh} \frac{d p_h}{d p_1} \frac{d p_h}{d p_1}} = 0,$$

wobei natürlich für  $\frac{d p_1}{d p_1}$  der Wert eins zu setzen ist.

Wir wollen nun an einem ganz einfachen Beispiele den Unterschied zwischen dem Principe der stationären und dem der kleinsten Wirkung erörtern.

Es bestehe das System aus einem einzigen materiellen Punkte, der entweder ganz frei oder gezwungen ist, auf einer vorgeschriebenen unveränderlichen Fläche zu bleiben, und auf den keine expliziten Kräfte wirken, d. h. keine als eventuell die Kraft, die ihn zwingt, auf dieser Fläche zu bleiben. Es ist  $V$  konstant, und da es für die variierte Bewegung der Koordinaten gleich derselben Funktion der Koordinaten sein muß, so hat es auch für diese denselben konstanten Wert.

Da ferner  $V + T$  unserer Verabredung gemäß ebenfalls für die variierte und unvariierte Bewegung denselben konstanten Wert haben muß, so muß  $T$  und daher auch die Geschwindigkeit  $c$  des materiellen Punktes für beide Bewegungen gleich derselben Konstanten sein. Aus Gleichung 224) folgt daher, daß:

$$\int_t^h \frac{m c^2}{2} dt = \frac{m c}{2} \int ds$$

ein Grenzwert sein muß. Da ferner  $m$  und  $c$  invariable Konstante sind, so muß

sein, also die Länge  $\int ds$  des Weges von einem unveränderlichen Ausgangspunkte zu einem unveränderlichen Endpunkte der Bewegung ein Grenzwert sein, ohne daß die zur Zurücklegung dieses Weges erforderliche Zeit für die variierte und unvariierte Bewegung gleich zu sein braucht.

Wollten wir dagegen das Prinzip der stationären Wirkung auf diesen Fall anwenden, so könnte, wie wir sahen, für die variierte Bewegung die Geschwindigkeit von Stelle zu Stelle ein wenig verschieden sein, müßte aber so variieren, daß die ganze Übergangszeit von einem fixen Ausgangspunkt zu einem fixen Endpunkte nicht variieren würde und das Integral (202), also auch (da  $V$ ,  $t_1 - t_0$  und  $m$  konstant sind) das Integral  $\int_{t_0}^{t_1} v^2 dt$  ein Grenzwert würde.

#### § 40. Verschiedene Fälle, wo die Grenzglieber verschwinden.

Das Prinzip der kleinsten Wirkung läßt sich noch mehr verallgemeinern. Wir nahmen bisher an, daß der Ausgangspunkt und Endpunkt der Bahnen sämtlicher materieller Punkte nicht variiert, was wir den Fall *A* nennen wollen. Das letzte Glied der Gleichung (223) verschwindet aber auch noch in vielen anderen Fällen. 1. Im folgenden Falle, den wir den Fall *B* nennen wollen. Sowohl die variierte als auch die unvariierte Bewegung sollen periodisch sein, so daß bei ersterer nach einer endlichen Zeit  $i$  genau dieselben Bewegungszustände, sowohl Positionen als auch Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsrichtungen, für sämtliche materielle Punkte gleichzeitig wiederkehren. Dasselbe soll gelten, wenn nochmals die Zeit  $i$  verläuft und dann wieder nach der Zeit  $i$  u. s. f. Für die variierte Bewegung soll analoges gelten; jedoch kann die Zeitdauer einer Periode unendlich wenig verschieden, z. B. gleich  $i + \delta i$  sein. Setzt man dann

$$t_1 = t_0 + i, \quad \delta t_1 = \delta i,$$

so gelten für jeden Wert des  $h$  infolge der Periodizität der Bewegung die Gleichungen:

$p_h^1 = p_h^0$ ,  $q_h^1 = q_h^0$ ,  $p_h^1 = p_h^0$  oder  $p_h^1 + \delta p_h^1 = p_h^0 + \delta p_h^0$ ,  
 daher:

$$\delta p_h^1 = \delta p_h^0.$$

Es verschwinden also im letzten Gliede der Gleichung 223) zwar nicht die auf die obere und untere Grenze bezüglichen Glieder separat, aber sie werden für beide Grenzen gleich, so daß das ganze letzte Glied der Gleichung 223) doch verschwindet. Wir setzen jetzt immer skleronome skleronom bestimmte Systeme voraus.

Ein dritter Fall, wo dieses Glied verschwindet, ist der folgende, den wir den Fall C nennen. Wir bezeichnen mit  $L_0$  die Stelle des Raumes, wo sich irgend ein materieller Punkt des Systems für die unvariierte Bewegung zur Zeit  $t_0$  befindet, mit  $M_0$  die Stelle, wo er sich für dieselbe Bewegung zur Zeit  $t_0 + dt_0$  befindet, mit  $N_0$  die Stelle, wo er sich bei der variierten Bewegung zur Zeit  $t_0$  befindet. Wir wollen ferner die Lage der Punkte des Systems durch gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten bestimmen und es seien:

$$p_h, p_{h+1} \text{ und } p_{h+2}$$

die rechtwinkligen Koordinaten des eben besprochenen materiellen Punktes. Dann sind die Momente gleich den mit der Masse  $m$  multiplizierten Geschwindigkeiten; es sind also

$$\frac{1}{m} q_h^0 dt_0, \quad \frac{1}{m} q_{h+1}^0 dt_0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{m} q_{h+2}^0 dt_0$$

die Projektionen der Geraden  $L_0 M_0$  auf die drei Koordinatenachsen. Dagegen sind:

$$\delta p_h^0, \delta p_{h+1}^0 \text{ und } \delta p_{h+2}^0$$

die Projektionen der Geraden  $L_0 N_0$  auf die Koordinatenachsen. Wenn also diese beiden Geraden aufeinander senkrecht stehen, so muß, wie man sofort sieht, wenn man die Kosinusse der Winkel, welche jede der Geraden mit den Koordinatenachsen bildet, einführt

$$q_h^0 \delta p_h^0 + q_{h+1}^0 \delta p_{h+1}^0 + q_{h+2}^0 \delta p_{h+2}^0 = 0$$

sein.



Ebenso wollen wir mit  $L_1$ ,  $M_1$ ,  $N_1$  die Stellen bezeichnen, wo sich derselbe materielle Punkt 1. auf der unvariirten Bahn zu den Zeiten  $t_1$ , 2. auf derselben Bahn zur Zeit  $t_1 + dt_1$ , 3. auf der variirten Bahn zur Zeit  $t_1 + \delta t_1$  befindet. Dann ist

$$q^1_h \delta p^1_h + q^1_{h+1} \delta p^1_{h+1} + q^1_{h+2} \delta p^1_{h+2} = 0$$

die Bedingung, daß auch die Geraden  $L_1 M_1$  und  $L_1 N_1$  aufeinander senkrecht stehen. Wenn man daher die Variation der Anfangslage und Endlage so ausführt, daß jeder Punkt in der Ebene verschoben wird, welche senkrecht steht, auf seiner augenblicklichen Bewegungsrichtung in der unvariirten Bahn, was wir die orthogonale Grenzbestimmung oder Grenzbestimmung  $K$  nennen wollen, so verschwindet das letzte Glied der Gleichung 223) ebenfalls. Hierbei ist natürlich unter der Variation der Endlage die Verschiebung von der Stelle, wo sich der materielle Punkt in der unvariirten Bahn zur Zeit  $t_1$  befand, welche die obere Grenze des Integrals 202) bildet, nach derjenigen Stelle zu verstehen, wo er sich in der variirten Bahn zur Zeit  $t_1 + \delta t_1$  befindet, welche die obere Grenze des auf die variirte Bahn bezughabenden Integrals 203) ist.

Wenn das letzte Glied der Gleichung 223) verschwindet, so folgt aus derselben

$$235) \quad 2 \delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta E dt.$$

Wir wollen nun nicht, wie wir es in den letzten vier Paragraphen taten, voraussetzen, daß dem Systeme bei der Variation der Bewegung keine Energie zugeführt wird. Wir wollen vielmehr annehmen, die unvariirte Bewegung geschehe mit der konstanten Energie  $E$ , die variirte aber mit der ebenfalls konstanten, aber unendlich wenig davon verschiedenen Energie  $E + \delta E$ , so daß sich das erste Glied der rechten Seite der Gleichung 223) auf  $(t_1 - t_0) \delta E$  reduziert. Die Kraftfunktion  $V$  soll die Zeit nicht explizit enthalten.

Wenn wir dann die GröÙe

$$236) \quad \bar{T} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} T dt$$

als das Zeitmittel der lebendigen Kraft für die unvariierte Bewegung während der Zeit  $t_1 - t_0$  bezeichnen, so erhalten wir aus Gleichung 223) jedesmal, wenn das letzte Glied dieser Gleichung verschwindet, also z. B. in jedem der Fälle, welche wir zu Anfang dieses Paragraphen die Fälle A, B und C genannt haben, die Gleichung:

$$237) \quad \frac{\delta E}{\bar{T}} = \delta l \left[ \left( \int_{t_0}^{t_1} T dt \right)^2 \right] = \delta l [\bar{T}^2 (t_1 - t_0)^2],$$

wobei  $l$  den natürlichen Logarithmus bezeichnet. Wir wollen die Bedeutung dieser Formel durch zwei Beispiele erläutern, deren erstes wir in diesem Paragraph bringen, während wir das zweite dem folgenden Paragraph vorbehalten. *1. Beispiel:* Es soll für irgend ein Wertebereich der Integrationskonstanten der Fall B eintreten d. h. die Bewegung soll eine periodische sein, die sich nach der Zeit  $t$ , deren Länge Funktion der Integrationskonstanten sein kann, genau wiederholt.

Dies trifft zu, wenn das System ein einzelner materieller Punkt ist, der unter dem Einfluß einer der Entfernung vom Zentrum direkt proportionalen Anziehung oder einer das Newtonsche Gravitationsgesetz befolgenden Anziehung eine Zentralbewegung macht. Im letzteren Falle jedoch nur für dasjenige Wertebereich der Integrationskonstanten, wo die Bahn ganz im Endlichen liegt.

Die Integrationskonstanten sollen anfangs bestimmte Werte haben, welche einer bestimmten Anfangsbewegung mit der Periode  $i_0$  und der mittleren lebendigen Kraft  $\bar{T}_0$  entsprechen. Dann soll dem System eine kleine Energiemenge  $\delta E_0$  zugeführt werden, wobei auch die Flächen-geschwindigkeit eine beliebige davon unabhängige Veränderung erfahren kann. Die mit diesen neuen Worten der Integrationskonstanten stattfindende Zentralbewegung nennen wir die zweite; ihr entspreche die Periode  $i_1$  und die mittlere

lebendige Kraft  $\bar{T}_1$ . Hierauf soll in gleicher Weise unter abermaliger beliebiger unendlich kleiner Änderung der Flächengeschwindigkeit eine zweite Energiemenge  $\delta E_1$  zugeführt werden, welche eine dritte Bewegungsart mit abermals veränderten Werten der Integrationskonstanten zur Folge hat. So fährt man fort, bis man eine ins Endliche verschiedene Schlußbewegung erhält, für welche die betreffenden Werte den Index  $m$  bekommen sollen.

Auf jede Veränderung der Bewegung kann man dann die Formel 237) anwenden, wobei man  $t_1 - t_0$  immer gleich der Periode  $i$  der betreffenden Bewegung setzt. Summiert man alle in dieser Weise der Reihe nach für die verschiedenen Veränderungen der Bewegung erhaltenen Gleichungen, so folgt:

$$\sum \frac{\delta E}{\bar{T}} = l(\bar{T}_m^2 i_m^2) - l(\bar{T}_0^2 i_0^2).$$

Wenn sich die Werte der Integrationskonstanten in der geschilderten Weise um Endliches von ihren Anfangswerten entfernt haben, und dann in anderer Weise schließlich wieder zu ihren Anfangswerten zurückgekehrt sind, so wollen wir dies einen Kreisprozeß nennen. Für einen solchen ist  $\bar{T}_m = \bar{T}_0$  und  $i_m = i_0$ , daher:

$$\sum \frac{\delta E}{\bar{T}} = 0.$$

Natürlich ist aber in diesem Falle auch  $\sum \delta E = 0$ ; da man ja zur alten Bewegung zurückgekehrt ist, der dieselbe Energie innewohnt.

#### § 41. Beispiel mit orthogonaler Variation.

Ein einziger materieller Punkt soll sich unter dem Einflusse von Kräften, die eine unveränderliche, die Zeit nicht explizit enthaltende Kraftfunktion haben, bewegen. Wir gehen von der unvariirten, mit der Energie  $E_0$  stattfindenden Bewegung zu einer unendlich wenig verschiedenen mit der Energie  $E_0 + \delta E_0$  stattfindenden Bewegung, dann zu einer mit der Energie  $E_0 + \delta E_0 + \delta E_1$  etc. statt-

findenden Bewegung über, bis wir endlich zu einer un-  
 Endliches verschiedenen Bewegung gelangen. Die Bewegung  
 soll aber jetzt nicht jedesmal in einer geschlossenen Bahn  
 geschehen. Es wird auch jetzt das letzte Glied der Glei-  
 chung (223) verschwinden und daher die Gleichung (237)  
 gelten, wenn wir für die erste Bewegung die Grenzen der  
 Integration beliebig wählen, aber für alle folgenden Be-  
 wegungen die Grenzen der Integration durch diejenige  
 Konstruktion bestimmen, welche wir orthogonale Grenz-  
 bestimmung oder die Konstruktion  $K$  genannt haben d. h.  
 als untere Grenze jedes folgenden Integrales soll die Zeit  
 gewählt werden, wann der Punkt in der variirten Bahn  
 die Ebene passiert, welche senkrecht zur augenblicklichen  
 Bewegungsrichtung durch denjenigen Punkt der vorigen  
 Bahn geht, wo er sich daselbst zur Zeit befand, welche  
 damals untere Grenze des Integrales war. Durch die  
 gleiche Konstruktion sollen sukzessive die oberen Grenzen  
 der Zeit gefunden werden. Dann gilt wieder die Glei-  
 chung (237).

Wenn man jetzt abermals einen Kreisprozeß durchläuft,  
 d. h. von der ursprünglichen Bahn  $M_1 N_1$  durch fortwährende  
 Variationen zu einer ganz anderen Bahn  $M_2 N_2$  übergeht und  
 dann wieder in einer anderen Weise (auf einem anderen  
 Wege) zur alten Bahn  $M_1 N_1$  mit den alten Integrations-  
 konstanten zurückkehrt, so muß wieder  $\sum \delta E = 0$  sein, aber  
 $\sum \frac{\delta E}{T}$  braucht nicht gleich Null zu sein, da man durch fort-

währende Anwendung der Konstruktion  $K$  bei Rückkehr  
 zur selben Bahn durchaus nicht immer auf dieser Bahn  
 auch zu demselben Ausgangspunkte und Endpunkte der  
 Integration, also zu denselben Grenzen für  $t$  zu gelangen  
 braucht, wenn man beim Übergange von der Bahn  $M_2 N_2$   
 zur Bahn  $M_1 N_1$  zurück nicht wieder dieselben Bahnen nur  
 in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen hat, wie beim Hin-  
 gange von der Bahn  $M_1 N_1$  zur Bahn  $M_2 N_2$ , sondern wenn  
 der Rückweg über ganz andere Bahnen, als der Hinweg  
 erfolgt ist.

Wir wollen dies deutlichkeitshalber in einem ganz

speziellen Falle durch Figuren versinnlichen. Sei eine endliche Strecke der ursprünglichen Bahn  $M_1 N_1$  gerade (Fig. 6). Wir wählen die beiden Punkte  $A$  und  $B$  als Integrationsgrenzen. Wir wollen nämlich immer kurz sagen:

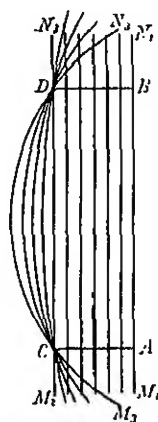


Fig. 6.

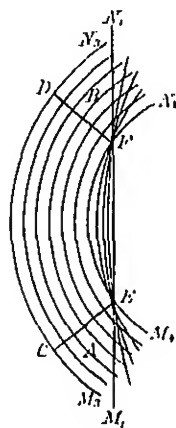


Fig. 7.

Ein Punkt ist Integrationsgrenze, wenn die Zeit, zu welcher das Bewegliche den betreffenden Punkt passiert, Integrationsgrenze des Integrales 202) ist. Die Variation der Bahn bestehe anfangs darin, daß sich dieses gerade Stück parallel zu sich selbst immer mehr nach links verschiebt, bis es in die Lage  $M_2 N_2$  gelangt ist. Wenn wir die Grenzen fort und fort orthogonal variieren, so kommen wir endlich bei der Bahn  $M_2 N_2$  zu den Punkten  $C$  und  $D$  als Integrationsgrenzen.

Während der weiteren Variation soll nun die Bahn sich immer mehr und mehr krümmen, bis wir zur Bahn  $M_3 N_3$  gelangt sind. Sie soll aber dabei immer durch die beiden Punkte  $C$  und  $D$  gehen. Wenn wir daher weiter orthogonal variieren, so hören die Punkte  $C$  und  $D$  während dieser zweiten Periode der Variation nicht auf die Integrationsgrenzen zu bleiben. Nun soll die Bahn des Beweglichen wieder zur alten Form zurückkehren, aber nicht auf demselben Wege, auf welchem sie sich von  $M_1 N_1$  in  $M_3 N_3$  verwandelte. Diese weitere Art der Variation ist in Fig. 7 dargestellt. Es soll

die Bahn zunächst ungefähr gleich gekrümmt bleiben, oder ihre Krümmung sogar noch etwas zunehmen. Dabei soll sich die Bahn aber immer mehr nach rechts verschieben (dritter Variationsprozeß). Die Reihe der Formen, welche die Bahn während des dritten Variationsprozesses durchläuft, nennen wir kurz die Kurvenschar  $S$ .

Wenn wir jetzt die Grenzen orthogonal transformieren, so kommen wir für die Punkte, welche der oberen und unteren Grenze des Integrales 223) entsprechen, auf die Punkteschar, die die beiden durch die Punkte  $C$  und  $D$  gehenden orthogonalen Trajektorien zur Kurvenschar  $S$  bilden. Diese beiden Trajektorien sollen die Gerade  $M_1 N_1$ , welche der ursprünglichen unvariirten Bahn angehört, in den beiden Punkten  $E$  und  $F$  treffen, welche also die Integrationsgrenzen darstellen, sobald die durch die Punkte  $K$  und  $L$  gehende Bahn von dem Beweglichen erreicht ist. Von da angefangen soll die Bahn in folgender Weise weiter variirt werden (viorter Variationsprozeß). Ihre Krümmung soll sich immer mehr vermindern, sie soll sich daher immer mehr der Geraden nähern, dabei aber nicht aufhören, durch die beiden Punkte  $E$  und  $F$  zu gehen. Wenn wir immer orthogonal transformieren, so bleiben also jetzt  $E$  und  $F$  die Integrationsgrenzen. Der vierte Variationsprozeß soll fortgesetzt werden, bis wieder die alte Bahn  $M_1 N_1$  erreicht ist und überhaupt wieder der ganze Bewegungsprozeß derselbe geworden ist, der er bei der ursprünglichen unvariirten Bewegung war.

Wir haben also jetzt einen vollständigen Kreisprozeß durchlaufen. Der Bewegungsprozeß wurde fort und fort variirt, bis er schließlich genau wieder der alte geworden ist. Die Bahn ging von der Gestalt  $M_1 N_1$  aus, transformierte sich allmählich in die Gestalt  $M_3 N_3$  und kehrte dann auf anderem Wege wieder in die ursprüngliche Gestalt  $M_1 N_1$  zurück. Obwohl daher das Integral  $\int_{t_0}^{t_1} T dt$  zum Schluß wieder genau über denselben Bewegungszustand zu erstrecken ist, wie zu Anfang, so ist doch jetzt der Wert desselben

ein ganz anderer, weil es zwischen ganz anderen Grenzen zu erstrecken ist. Ursprünglich waren nämlich die Integrationsgrenzen die Zeiten, während welcher das Bewegliche die Punkte  $A$  und  $B$  passierte. Jetzt sind es die Zeiten, während welcher es die Punkte  $M$  und  $F$  passiert, welche mit  $\tau_0$  und  $\tau_1$  bezeichnet werden mögen. Wenn wir daher durch das Integralzeichen jetzt eine Summe aller während des ganzen in Fig. 6 und 7 dargestellten Variationsprozesses eintretenden Zuwächse bezeichnen, so folgt aus Gleichung 237)

$$238) \quad \int_{\bar{r}}^{\delta E} = l \left[ \int_{t_0}^{t_1} T dt \right]^2 - l \left[ \int_{t_0}^{t_1} T dt \right]^2,$$

was im allgemeinen keineswegs gleich Null sein wird.

Um die Sätze, welche wir in diesem und dem vorigen Paragraphen behandelt haben noch weiter zu spezialisieren, können wir den schon im ersten Teile § 22 behandelten Fall einer Zentralbewegung benutzen, welche ein materieller Punkt von der Masse  $m$  ausführt, wenn er gegen ein festes Zentrum 0 mit der Kraft  $\frac{m\lambda}{r^2} - \frac{ma}{r^3}$  gezogen wird.

Hierbei ist  $r$  die Entfernung des materiellen Punktes vom Anziehungszentrum,  $\lambda$  und  $a$  sind konstant. Aus den dort entwickelten Formeln findet man durch Ausführung einiger überaus einfacher Integrationen<sup>1)</sup> für die Zeit, welche das Bewegliche braucht, um vom Perihel (Perizentrum) zum Aphel (Apozentrum) zu gelangen, den Betrag:

$$\tau = - \frac{\pi \lambda}{h} \sqrt{-\frac{1}{h}}.$$

Ferner ergibt sich das vom Perihel zum Aphel erstreckte Integral

$$\int T dt = \pi m \left[ -\frac{3\lambda}{2} \sqrt{-\frac{1}{h}} + \frac{a}{2} \sqrt{\frac{1}{h} + \frac{1}{k^2}} \right].$$

<sup>1)</sup> Näheres über die Durchführung dieser Integrationen, auf welche ich hier nicht weiter eingehen will, da es bloße Übungsaufgaben zu den einfachsten Sätzen der Integralrechnung sind, findet man Wiener Sitzungsber. Bd. 75, II, Januar 1877.

Die Division dieser beiden Ausdrücke liefert:

$$238) \quad T = m h \left[ \frac{3}{2} - \frac{a}{2\lambda} \sqrt{-\frac{h}{a+k^2}} \right].$$

Der gesamte Zuwachs der Energie aber ist  $\delta E = \delta h$ . Es folgt also:

$$239) \quad \frac{\delta E}{T} = \frac{\delta h}{m h \left[ \frac{3}{2} - \frac{a}{2\lambda} \sqrt{-\frac{h}{a+k^2}} \right]}.$$

Für  $a = 0$  geschieht die Zentralbewegung nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze. Die Bahn ist, sobald sie überhaupt ganz im Endlichen liegt, eine geschlossene. Und es ist auch  $\frac{\delta E}{T}$  ein vollständiges Differential. Ist dagegen  $a$  von Null verschieden, so sind die Bahnen im allgemeinen nicht geschlossen. Es ist dann auch  $\frac{\delta E}{T}$  kein vollständiges Differential der beiden als independent betrachteten Variablen  $h$  und  $k$  (der durch die Anfangswerte bestimmten Integrationskonstanten der Bewegungsgleichung). Denn es ist allerdings für orthogonale Variation der Grenzen nach Formel 237):  $\frac{\delta E}{T} = \left| \int (f' T' dt)^2 \right|_{\text{Auf.}}^{\text{Endo.}}$ .

Allein wenn die Bahn nach beliebiger Variation der Größen  $h$  und  $k$  wieder dieselbe wird, so werden die Grenzen von  $\int T' dt$  bei fortwährender orthogonaler Variation keineswegs dieselben und  $\left| \int (f' T' dt)^2 \right|_{\text{Auf.}}^{\text{Endo.}}$  hat einen von Null verschiedenen Wert.



## IV. Analogien mit physikalischen, besonders wärmetheoretischen Sätzen.

### § 42. Analogon der zugeführten Wärme.

Die spezielle Eigentümlichkeit der Gleichungen der Thermodynamik ist dadurch bedingt, daß der Zuwachs der zugeführten Wärme kein vollständiger Differentialausdruck ist. Nun ist aber das Differentiale  $\delta E$  der zugeführten Energie immer ein vollständiger Differentialausdruck, solange wir, wie in den Beispielen des vorigen Paragraphen, skleronome Systeme betrachten. Solange wir uns daher auf die Betrachtung solcher Systeme beschränken und das Differential der zugeführten Wärme mit dem Zuwachse  $\delta E$  der Gesamtenergie in Parallele stellen, ist also schon in diesem wichtigsten Stücke keine Analogie vorhanden.

Es hat aus diesem Grunde schon Clausius Systeme betrachtet, in denen Fernkräfte vorkommen, deren Wirkungsgesetz sich mit der Zeit ändert, so daß also an die Stelle gewisser, sonst in der Kraftfunktion  $V$  vorkommender Konstanten, mit der Zeit sehr langsam veränderliche Parameter treten und das betrachtete mechanische System rheonom ist.

Wenn man sich z. B. einen ein warmes Gas abschließenden Stempel unter dem Bilde äußerer auf die Gas-moleküle wirkender abstoßender Normalkräfte denkt, die bei großer Annäherung an die Oberfläche des Stempels plötzlich enorm große Werte annehmen, so kann man sich ein langsames Zurückweichen des Stempels unter dem Bilde einer langsamen Änderung der Kraftfunktion dieser Kräfte denken. Analog fingiert Clausius auch Zentralbewegungen, bei denen das Wirkungsgesetz der Zentralkraft mit der Zeit veränderliche Parameter enthält.

Es tritt aber bei dieser Clausiusschen Vorstellung der Veränderlichkeit des Wirkungsgesetzes der Naturkräfte eine Rechnungsschwierigkeit ein. Zur Kraftfunktion  $V$  dieser Kräfte tritt immer eine additive willkürliche Konstante hinzu, welche wir dadurch bestimmt denken können, daß für

eine bestimmte Lage sämtlicher materieller Punkte des Systems (Nullniveau des Potentials)  $V = 0$  wird. Für skleronome Systeme ist es vollkommen gleichgültig, welche Lage man hierfür wählt. Ändert sich dagegen das Wirkungsgesetz der Kraft mit der Zeit, so ändert sich auch die Arbeit, welche die Überführung von einer Nulllage in eine andere erfordert. Der Absolutwert des  $V$  ändert sich daher in verschiedener Weise, je nachdem die eine oder andere Nulllage gewählt wird und um vollständig bestimmt zu sein, muß man angeben, welche besondere Lage man als Nulllage wählt.

Am besten ist es da wohl immer diejenige Lage zu wählen, wobei alle materiellen Punkte so weit voneinander und von allen übrigen auf sie wirkenden Punkten entfernt sind, daß auf keinen derselben mehr eine bemerkbare Kraft wirkt. In physikalischen Fällen wird diese Wahl der Nulllage immer möglich sein. Nur bei Kraftgesetzen, welche durch mathematische Abstraktion konstruiert sind, z. B. wenn die Kraft, welche zwischen zwei materiellen Punkten wirkt, der Entfernung derselben direkt proportional angenommen wird, kann diese Wahl der Nulllage unmöglich werden.

Die Clausiussche Annahme, daß sich das Wirkungsgesetz der zwischen den materiellen Punkten tätigen Kräfte mit der Zeit verändert, gibt zwar eine vollständige Analogie mit den thermodynamischen Gleichungen; allein in der Natur bemerken wir nichts, was darauf hindeuten würde, daß das Wirkungsgesetz gewisser Naturkräfte mit der Zeit veränderlich wäre. Ja es würde sogar die physikalische Forschung überhaupt aufhören, wenn wir nicht wüßten, ob die Naturgesetze, welche wir heute gefunden haben, auch noch für spätere Zeiten richtig sein werden. Es ist daher unter dieser Clausiusschen Annahme die Energiobilanz eine äußerst schwankende, zu einer unzweideutigen Definition derselben kann man nur unter mehr oder minder willkürlichen Annahmen gelangen und es empfiehlt sich, die Annahme der Veränderlichkeit des Wirkungsgesetzes der Kräfte durch die Voraussetzung zu ersetzen, daß mit den

$n$  materiellen Punkten, welche das betrachtete System bilden, noch andere ( $\nu$ ) materielle Punkte in Wechselwirkung stehen. Die letzteren Punkte sollen während der unvariirten Bewegung vollständig unbeweglich sein; während der Variation der Bewegung aber außerordentlich langsam ihren Ort verändern. Dann fällt auch die oben erwähnte Rechnungsschwierigkeit wieder fort.

Es wird dann nicht die gesamte den  $n$  Punkten zugeführte Energie mit der zugeführten Wärme in Parallele gesetzt, sondern die Arbeit, welche die  $n$  Punkte infolge ihrer Bewegung unter dem Einflusse der von den  $\nu$  Punkten auf sie ausgeübten Kräfte gewinnen, entspricht der einem Körper zugeführten äußeren Arbeit und bloß die übrige zugeführte Energie der zugeführten Wärme, so daß das Differential desjenigen Energieanteils, welches der zugeführten Wärme entspricht, kein vollständiges Differential ist, während das Differential der totalen zugeführten Energie es doch ist.

Die Lage der  $n$  materiellen Punkte soll durch  $s$  Koordinaten (die rasch veränderlichen), die der  $\nu$  Punkte aber durch  $g$  Koordinaten (die langsam veränderlichen Parameter) bestimmt sein.

So erhält man z. B. in folgender Weise ein gutes Bild der umkehrbaren Zustandsänderungen eines Gases, welches durch einen Stempel abgeschlossen ist. Die Molekularbewegung und innere Atombewegung der Gasmoleküle läßt man der raschen Bewegung der betrachteten  $n$  materiellen Punkte entsprechen. Die Moleküle des Stempels, deren Wärmebewegung wir uns ohne erhebliche Änderung des Problems hinwegdenken können, läßt man den  $\nu$  materiellen Punkten entsprechen, welche sich nur bei Variation des Zustandes des Gases (und zwar solange dessen Zustandsänderungen umkehrbar sind, außerordentlich langsam) bewegen.

#### § 43. Begriff der zyklischen und der damit verwandten Bewegungen.

Es handelt sich nun noch darum, auch der raschen Bewegung der  $n$  materiellen Punkte solche Eigenschaften

zuzuschreiben, daß sie sich möglichst zu einem treuen Abbilde der für die Wärmebewegung charakteristischen Eigenschaften eignet.

Die Aufgabe, eine kurze, systematische Zusammenstellung aller Grundtypen mechanischer Systeme zu geben, welche zu diesem Behufe verwendet wurden, wird dadurch erschwert, daß viele derselben einige Merkmale mit andern derselben gemein haben und die verschiedenen Autoren bald die einen, bald die andern Merkmale als die wesentlichsten ansahen, wodurch auch die Terminologie eine schwankende wurde. In der hier versuchten Zusammenstellung wird es mir daher weder gelungen sein Vollständigkeit noch größtmögliche Übersicht in der Klassifizierung zu erreichen und ich war auch gezwungen in der Terminologie bald von der des einen, bald wieder von der des andern Autors ein wenig abzuweichen.

Wenn wir die Grundanschauungen der mechanischen Theorie der Wärme akzeptieren, so besteht eine der hervorstechendsten Eigenschaften der Wärmeenergie darin, daß in einem warmen Körper zwar fortwährend die lebhafteste Bewegung der kleinsten Teilchen stattfindet, daß wir aber trotzdem in dem äußerlich sichtbaren und wahrnehmbaren Zustande desselben keine Veränderung bemerken, während wir sonst, wenn ein Körper sich bewegt, klar wahrnehmen, wie sich der Zustand desselben mit der Zeit fortwährend ändert.

Dieselbe Eigenschaft finden wir auch auf anderen Gebieten der Physik. Auch an einem ruhenden elektrischen Strome von unveränderlicher Intensität, in dessen Nachbarschaft sich ruhende Magnete oder Eisenmassen befinden, sehen wir außer in der treibenden Batterie nirgends die mindeste zeitliche Veränderung und trotzdem erklärt Maxwell die Eigenschaften desselben durch die Hypothese, daß das Wesen des elektrischen Stromes in einer heftigen Bewegung bestehe, deren Schauplatz teils das Innere des Stromleiters, teils auch der umgebende Äther ist.

Wir müssen uns also nach mechanischen Modellen umsehen, denen ähnliche Eigenschaften zukommen. Ein Beispiel eines solchen Modelles liefert ein starrer, rund um

seine Achse herum absolut symmetrischer Rotationskörper, der keine andere Bewegung macht, als eine rapide Drehung um diese Achse. Ein anderes Beispiel liefert ein wirbelloser Strom einer absolut homogenen, inkompressiblen reibungslosen Flüssigkeit in einem in sich selbst zurücklaufenden Kanale mit absolut starren Wänden. Wir bezeichnen derartige Bewegungen als zyklische.

Spezielle zyklische Systeme wurden schon früher mehrfach in der Mechanik und Wärmetheorie besonders von Rankine verwendet. Maxwell behandelte zuerst allgemeine zyklische Systeme und verwendete sie zur Erklärung der elektromagnetischen und elektrodynamischen Erscheinungen. Ihre Anwendung auf die Wärmetheorie in allgemeinerer Form als es durch Rankine geschah, die Weiterentwicklung der schon von Maxwell aufgestellten Grundgleichungen für dieselben, sowie auch die Grundzüge der jetzt üblichen Terminologie dafür ist Helmholtz zu verdanken.

Zyklische Systeme im strengsten Sinne (wir wollen sie im folgenden echte Zykeln nennen) sind solche, in denen zwar beliebige Bewegungen stattfinden, jedoch so, daß, wenn irgend ein Massenteilchen eine Stelle des Raumes verläßt, immer sofort ein vollkommen gleich beschaffenes an dessen Stelle tritt, welches die gleiche gleichgerichtete Geschwindigkeit hat, die auch das erstere Teilchen an dieser Stelle des Raumes hatte. Eine Koordinate heißt eine echt zyklische, wenn das System eine solche Bewegung ausführt, sobald sich diese Koordinate unter Konstanthaltung der übrigen Koordinaten verändert.

Die Molekularbewegungen, welche nach der mechanischen Wärmetheorie die Wärme darstellen, sind nach den Vorstellungen dieser Theorie keine streng zyklischen. Nur wegen der großen Zahl der bewegten Moleküle erreicht immer, sobald ein Molekül aus einem gewissen Bewegungszustande austritt, bald in der Nachbarschaft ein anderes Molekül einen sehr ähnlichen Bewegungszustand, so daß wir äußerlich keine Veränderung wahrnehmen. Deshalb hat man den Begriff der echt zyklischen Systeme erweitert; das Charakteristikum der echt zyklischen Systeme

besteht darin, daß ihre sämtlichen Eigenschaften nicht von dem Absolutwerte der echt zyklischen Koordinaten, sondern bloß von deren Änderungsgeschwindigkeiten abhängen. Der nach der Zeit nicht differenzierte Wert einer zyklischen Koordinate kann daher weder im Ausdrucke für die lebendige Kraft, noch in den Ausdrücken für die auf das System wirkenden Kräfte noch in den die Bedingungen ausdrückenden Funktionen vorkommen. In Verallgemeinerung des Begriffs der echt zyklischen Koordinaten wollen wir nach dem Vorgange Hertz' jede beliebige Koordinate, deren nach der Zeit nicht differenzierter Wert in allen diesen Ausdrücken nicht vorkommt, als eine zyklische Koordinate schlechtweg bezeichnen.

Wenn in einem Systeme weder innere noch äußere Kräfte tätig sind, wie dies Hertz von allen Systemen annimmt, so sind, falls auch keine Bedingungsgleichungen vorhanden sind, selbst die rechtwinkligen Koordinaten zyklische.

Eine gewisse Verwandtschaft mit den zyklischen Systemen haben solche Systeme, deren Bewegung eine periodische ist, bei denen also nach Verlauf einer gewissen Zeit immer wieder genau dieselben Bewegungszustände in derselben Reihenfolge wiederkehren, und welche wir kurz periodische Systeme nennen wollen. Dieselben können, wenn den periodisch bewegten Massen nur eine untergeordnete Rolle zufällt, fast alle Eigenschaften der zyklischen haben, wenn sie sich z. B. nur dadurch von echt zyklischen unterscheiden, daß sie rotierende Zahnräder, hin- und hergehende Kolben oder sonstige oszillierend sich bewegende Massen enthalten.

Helmholtz geht noch weiter und betrachtet Systeme, welche bloß der Bedingung unterworfen sind, daß nicht nur die Summe der kinetischen und potentiellen Energie, sondern jede dieser Energien für sich immer konstant bleibt. Er nennt diese Systeme isokinetische. Einen noch allgemeineren Begriff bildet Clausius, indem er eine Bewegung, wobei niemals der Wert irgend einer der rechtwinkligen Koordinaten oder irgend einer der Geschwindigkeitskomponenten

eines materiellen Punktes nach den Koordinatenrichtungen über alle Grenzen wächst, wenn die Bewegung beliebig lang fortgesetzt wird, als eine stationäre bezeichnet, wofür ich aber lieber das Wort „finit“ gebrauchen will. Wenn außerdem noch die Bewegung zwar nicht in dem Sinne periodisch ist, daß nach Verlauf einer endlichen Zeit alle materiellen Punkte gleichzeitig exakt zu ihrer alten Lage, Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsrichtung zurückkehren und dann wieder die gleiche Bewegung von vorn beginnen, aber doch eine solche Regelmäßigkeit in der Bewegung herrscht, daß das Zeitmittel der lebendigen Kraft, einer Geschwindigkeitskomponente, oder des Wertes irgend einer rechtwinkligen Koordinate irgend eines materiellen Punktes oder der gesamten Kraftfunktion  $V$  etc. je einer festbestimmten Grenze zueilt, wenn man die Zeit, während welcher dieses Mittel genommen wird, ohne die Bewegung zu variieren, in beliebiger Weise über alle Grenzen wachsen läßt, so wollen wir eine solche Bewegung eine mesische nennen.

#### § 44. Spezielle Beispiele.

Wir wollen, ehe wir an die Ausführung der Rechnung gehen, das Gesagte durch einige Beispiele erläutern.

Das *erste Beispiel* ist das schon mehrfach erwähnte, aus der kinetischen Theorie der Gase oder tropfbaren Flüssigkeiten. Das System wird gebildet durch  $n$  materielle Punkte, die sich ganz wie nach den Anschauungen der mechanischen Wärmetheorie die Moleküle eines dem van der Waals'schen Gesetze folgenden Gases oder einer tropfbaren Flüssigkeit in einem zylindrischen Gefaße mit starren Wänden bewegen, das oben durch einen vollkommen dichten, reibungslosen Stempel abgeschlossen ist. Die Erhöhung der lebendigen Kraft etwa durch von außen irgend woher kommende Molekularstöße korrespondiert der zur Temperaturerhöhung verwendeten zugeführten Wärme, wogegen die gegen die zwischen den  $n$  materiellen Punkten tätigen Innenkräfte geleistete Arbeit der inneren Arbeit korrespondiert. Die  $s$  Variablen sind die zur Bestimmung der Lage der  $n$  materiellen Punkte notwendigen Größen.

Der Stempel bewegt sich immer nur langsam, so daß sein Druck immer nahe gleich dem Gegendrucke der materiellen Punkte ist, zwischen denen immer auch nahezu Gleichgewicht der lebendigen Kraft bestehen soll. Die  $g$  Variablen bestimmen die Lage des Stempels. Die Arbeit der Kraft, welche der Stempel auf die materiellen Punkte ausübt, ist die äußere Arbeit. Sie ist gleich der Arbeit, welche die von außen auf den Stempel wirkenden Kräfte leisten. Dieses System ist bei genügend großer Zahl der Moleküle ein unechtes Zykel, isokinetisch, finit und mesisch, doch nicht periodisch.

*Zweites Beispiel: Zentralbewegungsmodell.* Wir betrachten ähnlich, wie wir es schon am Schlusse des Paragraphen 41 taten, die Zentralbewegung eines einzigen materiellen Punktes. Aber es sei Vorsorge getroffen, daß sich während der Zentralbewegung die beiden Konstanten  $\lambda$  und  $a$  langsam verändern können, welche das Gesetz bestimmen, nach dem die Zentralkraft wirkt.

An Stelle der Clausius'schen Annahme einer direkten Veränderlichkeit der Naturgesetze wollen wir uns die Veränderlichkeit von  $\lambda$  und  $a$  durch gewöhnliche mechanische Hilfsmittel bewirkt denken. Handelt es sich zunächst um die Zentralbewegung eines Planeten um die Sonne, so können wir uns etwa vorstellen, daß von außen stets Massen (Meteorsteine) in die Sonne stürzen, so daß deren Masse und daher auch deren Anziehungskraft gegen den Planeten mit der Zeit wächst. Wollte man einen geschlossenen Prozeß analog dem Carnotschen Kreisprozesse konstruieren, so müßten z. B. zuerst Massen in die Sonne stürzen. Hierbei würde äußere Arbeit gewonnen. Dann müßte die lebendige Kraft der Zentralbewegung, welcher die Wärmeenergie des warmen Körpers entspricht, vermindert werden. Dann müßten dieselben Massen wieder von der Sonne fort bis in unendliche Entfernung gebracht werden. Hierbei wäre weniger Arbeit zu leisten als früher beim Hineinstürzen gewonnen wurde, da ja der Planet jetzt entfernter ist und weniger Anziehung ausübt. Endlich müßte wieder die Energie der Umlaufbewegung des Planeten durch eine ent-



eines materiellen Punktes nach den Koordinatenrichtungen über alle Grenzen wächst, wenn die Bewegung beliebig lang fortgesetzt wird, als eine stationäre bezeichnet, wofür ich aber lieber das Wort „finit“ gebrauchen will. Wenn außerdem noch die Bewegung zwar nicht in dem Sinne periodisch ist, daß nach Verlauf einer endlichen Zeit alle materiellen Punkte gleichzeitig exakt zu ihrer alten Lage, Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsrichtung zurückkehren und dann wieder die gleiche Bewegung von vorne beginnen, aber doch eine solche Regelmäßigkeit in der Bewegung herrscht, daß das Zeitmittel der lebendigen Kraft, einer Geschwindigkeitskomponente, oder des Wertes irgend einer rechtwinkligen Koordinate irgend eines materiellen Punktes oder der gesamten Kraftfunktion  $V$  etc. je einer festbestimmten Grenze zueilt, wenn man die Zeit, während welcher dieses Mittel genommen wird, ohne die Bewegung zu variieren, in beliebiger Weise über alle Grenzen wachsen läßt, so wollen wir eine solche Bewegung eine mesische nennen.

#### § 44. Spezielle Beispiele.

Wir wollen, ehe wir an die Ausführung der Rechnung gehen, das Gesagte durch einige Beispiele erläutern.

Das *erste Beispiel* ist das schon mehrfach erwähnte, aus der kinetischen Theorie der Gase oder tropfbar flüssigkeiten. Das System wird gebildet durch  $n$  materielle Punkte, die sich ganz wie nach den Anschauungen der mechanischen Wärmetheorie die Moleküle eines dem van der Waals'schen Gesetze folgenden Gases oder einer tropfbar flüssigkeit in einem zylindrischen Gefäße mit starren Wänden bewegen, das oben durch einen vollkommen dichten, reibungslosen Stempel abgeschlossen ist. Die Erhöhung der lebendigen Kraft etwa durch von außen irgend woher kommende Molekularstöße korrespondiert der zur Temperaturerhöhung verwendeten zugeführten Wärme, wogegen die gegen die zwischen den  $n$  materiellen Punkten tätigen Innenkräfte geleistete Arbeit der inneren Arbeit korrespondiert. Die  $s$  Variablen sind die zur Bestimmung der Lage der  $n$  materiellen Punkte notwendigen Größen.

Der Stempel bewegt sich immer nur langsam, so daß sein Druck immer nahe gleich dem Gegendrucke der materiellen Punkte ist, zwischen denen immer auch nahezu Gleichgewicht der lebendigen Kraft bestehen soll. Die  $g$  Variablen bestimmen die Lage des Stempels. Die Arbeit der Kraft, welche der Stempel auf die materiellen Punkte ausübt, ist die äußere Arbeit. Sie ist gleich der Arbeit, welche die von außen auf den Stempel wirkenden Kräfte leisten. Dieses System ist bei genügend großer Zahl der Moleküle ein unechtes Zykel, isokinetisch, finit und mesisch, doch nicht periodisch.

*Zweites Beispiel: Zentralbewegungsmodell.* Wir betrachten ähnlich, wie wir es schon am Schlusse des Paragraphen 41 taten, die Zentralbewegung eines einzigen materiellen Punktes. Aber es sei Vorsorge getroffen, daß sich während der Zentralbewegung die beiden Konstanten  $\lambda$  und  $a$  langsam verändern können, welche das Gesetz bestimmen, nach dem die Zentralkraft wirkt.

An Stelle der Clausiusschen Annahme einer direkten Veränderlichkeit der Naturgesetze wollen wir uns die Veränderlichkeit von  $\lambda$  und  $a$  durch gewöhnliche mechanische Hilfsmittel bewirkt denken. Handelt es sich zunächst um die Zentralbewegung eines Planeten um die Sonne, so können wir uns etwa vorstellen, daß von außen stets Massen (Meteorsteine) in die Sonne stürzen, so daß deren Masse und daher auch deren Anziehungskraft gegen den Planeten mit der Zeit wächst. Wollte man einen geschlossenen Prozeß analog dem Carnotschen Kreisprozesse konstruieren, so müßten z. B. zuerst Massen in die Sonne stürzen. Hierbei würde äußere Arbeit gewonnen. Dann müßte die lebendige Kraft der Zentralbewegung, welcher die Wärmeenergie des warmen Körpers entspricht, vermindert werden. Dann müßten dieselben Massen wieder von der Sonne fort bis in unendliche Entfernung gebracht werden. Hierbei wäre weniger Arbeit zu leisten als früher beim Hineinstürzen gewonnen wurde, da ja der Planet jetzt entfernter ist und weniger Anziehung ausübt. Endlich müßte wieder die Energie der Umlaufbewegung des Planeten durch eine ent-

sprechende Energiezufuhr auf den alten Stand gebracht werden und wir nehmen an, daß Gestalt, Lage und Bewegungsgeschwindigkeiten zum Schlusse wieder dieselben wie zu Anfang des Prozesses sind. Da hier die Bahn stets eine geschlossene ist, so wäre bereits vollständige Analogie mit dem zweiten Hauptsatze vorhanden. Wenn  $\bar{T}$  die mittlere lebendige Kraft des Planeten in seiner Umlaufsbewegung und  $\delta Q$  die Energie ist, die man ihm behufs Erhöhung der lebendigen Kraft seiner Umlaufsbewegung während eines unendlich kleinen Teiles des Prozesses zuführen muß, so ist nicht  $\delta Q$ , wohl aber  $\delta Q/\bar{T}$  ein vollständiges Differential, sobald die Masse der Sonne stets so langsam zu- und abnimmt, daß die Zu- oder Abnahme während eines Planetenumlaufs als klein und gleichförmig mit der Zeit erfolgend betrachtet werden kann. Man kann dies durch Ausführung der Rechnung im Detail verifizieren, doch ist das Hineinstürzen von Massen in die Sonne immerhin ein für die Rechnung noch etwas unbequemer Vorgang.

Eine physikalisch zwar etwas abstrakte, aber mechanisch noch weit klarere Vorrichtung, welche in größter Allgemeinheit alle denkbaren Fälle illustriert, ist die folgende: eine sehr kleine vollkommen glatte Kugel von der Masse  $m$  bewege sich auf einer glatten horizontalen Ebene. Daran sei ein biegsamer massenloser Faden von unveränderlicher Länge befestigt, der durch ein Loch der Ebene geht, dann vertikal herabhängt und am Ende einen massenlosen, in einer vertikalen Röhre reibungslos beweglichen Magnetpol  $A$  trägt. Vertikal unter diesem befinde sich ein außerordentlich kurzer, um eine horizontale Achse drehbarer Magnet, dessen sehr nahe Pole  $B$  und  $C$  heißen sollen.

Man kann nun dem Kügelchen  $m$  während der Zentralbewegung durch kleine Stöße langsam lebendige Kraft zuführen (dies entspricht der Wärmezufuhr) und auch den Magneten langsam drehen (entsprechend der Bewegung des Stempels). So kann man den Zustand langsam variieren und auch wieder auf anderem Wege zum alten Bewegungszustande zurückkehren, indem man z. B. zuerst bei weniger lebhafter Bewegung des Kügelchens  $m$  den kurzen Magnet

dreht, dann lebendige Kraft zuführt, dann bei heftiger Bewegung den kurzen Magnet langsam in die alte Lage zurückdreht und dann wieder gerade so viel lebendige Kraft entzieht, bis die lebendige Kraft den alten Wert erlangt hat und dabei auch die Bewegungsrichtung gerade so ändert, daß schließlich wieder dieselbe Bahn bei gleicher Lage des Magnets eintritt. Die Variablen, welche die Position der Masse  $m$  in der Ebene bestimmen, sind die, welche wir früher die  $s$  Variablen nannten, die  $g$  Variablen reduzieren sich auf eine einzige, nämlich den Drehungswinkel des Magnets.

Man kann in zweifacher Weise bewirken, daß die von außen auf den Magneten wirksame Kraft nicht während der unvariirten Bewegung periodisch veränderlich, sondern nur, falls die Bewegung variiert wird, langsam mit der Zeit veränderlich zu sein braucht: erstens wenn man annimmt, daß die Umlaufszeit der Masse  $m$  sehr kurz und das Trägheitsmoment des Magneten bezüglich seiner Drehungsachse enorm groß ist, so daß er während der Wanderung der Masse  $m$  vom Perihel bis zum Aphel nur eine verschwindend kleine Drehung macht, zweitens wenn man auf der horizontalen Ebene statt einer einzigen unendlich viele vollkommen gleich beschaffene Massen  $m$  fingiert, welche alle möglichen Phasen derselben Zentralbewegung gleichzeitig haben, und sich, ohne sich gegenseitig zu stören, unabhängig voneinander bewegen und alle vom Magneten in gleicher Weise und durch Vermittlung der gleichen beschriebenen Vorrichtungen affiziert werden. Dadurch kann man das System in ein isokinetisches im Sinne Helmholtz' und zugleich auch in ein echt zyklisches verwandeln, wenn nämlich alle diese Massen die ganze Fläche, welche sie bei der Zentralbewegung im Verlauf der Zeit bestreichen, schon zu Anfang der Zeit in passender Weise kontinuierlich bedecken. Doch ist dann zur Bestimmung der Lage irgend eines der in Zentralbewegung begriffenen Massentheilehen nebst den langsam veränderlichen Koordinaten, welche die Position des oder der Magnete bestimmen, keineswegs die Kenntnis einer einzigen zyklischen Variablen ausreichend, sondern es sind dazu noch zwei Variablen (zwei rechtwinklige Koordinaten in der Ebene,

oder die Bahnlänge und die Bewegungsrichtung in gegebener Entfernung vom Kraftzentrum) erforderlich.

Will man bewirken, daß die Zentralbewegung jeder Masse nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze erfolgt, so darf man keinen gewöhnlichen Magneten anwenden, sondern der Pol  $A$  muß von dem näheren Pole  $B$  mit einer der ersten Potenz der Entfernung verkehrt proportionalen Kraft angezogen, von dem entfernten Pole  $C$  aber mit einer gleichen Kraft abgestoßen werden. Dann wird wieder nicht  $\delta Q$ , wohl aber  $\delta Q/\bar{T}$  ein vollständiges Differential sein. Hat man gleichzeitig zwei Magnete, von denen der eine von der eben geschilderten Beschaffenheit ist, der andere aber nach demselben Gesetze wirkt, wie ein gewöhnlicher Magnet, und von denen jeder unabhängig von dem andern drehbar ist, so erhält man eine Zentralbewegung, bei welcher die Zentralkraft das am Ende des Paragraphen 41 erwähnte Gesetz befolgt und die beiden Konstanten  $\lambda$  und  $a$  unabhängig voneinander langsam verändert werden können.

Es ist dann auch  $\delta Q/\bar{T}$  kein vollständiges Differential und man sieht, daß nicht für alle isokinetischen und auch nicht alle rein zyklischen Systeme  $\delta Q/\bar{T}$  ein vollständiges Differential ist. Bezüglich der ausführlichen Berechnung aller Beispiele verweise ich auf Wien. Sitz. Ber. II, 92, S. 853 Okt. 1885, Exn. Rep. d. Physik 22, S. 135.

*Drittes Beispiel.* Eine Masse rotiert rasch um eine Achse und ihre Entfernung von der Achse ist der langsam veränderliche Parameter. Es ist dies ein lehrreiches Beispiel für ein zyklisches System im weiteren Sinne nach der Bezeichnungswaise Hertz', welches kein echtes Zykel ist. Es soll Kürze halber im folgenden immer als das Zentrifugalmodell bezeichnet werden. Über die schöne Analogie, welche diese einfache mechanische Vorrichtung mit dem Carnotschen Satze und dem Verhalten vollkommener Gase zeigt, vergl. meine Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichtes 1. Band, 2. Vorlesung. Im selben Buche, 4. und 6. Vorlesung, ist auch eine Vorrichtung beschrieben, an welcher zwei voneinander unabhängige zyklische Bewegungen möglich sind.

*Viertes Beispiel: Das Flüssigkeitsstrommodell.* Eine reibungslose, inkompressible Flüssigkeit strömt wirbelloso in einem in sich zurücklaufenden Kanale. Die Gestalt des Kanales und auch dessen Querschnitt an verschiedenen Stellen kann langsam veränderlich sein, ohne daß jedoch der gesamte Hohlraum des Kanales variiert. Dieses System ist ein echtes Zykel.

§ 45. Es wird weder Periodizität noch zyklischer Charakter der Bewegung vorausgesetzt.

Wir wollen nun zunächst die Rechnung möglichst allgemein durchführen. Wir denken uns  $n$  materielle Punkte (das Kügelchen  $m$  des Zentralbewegungsmodells), deren Lage durch  $s$  generalisierte Koordinaten bestimmt ist. Zwischen den letzteren können möglicherweise noch  $\sigma$  mit der Zeit vollkommen unveränderliche Bedingungen bestehen, die also auch für alle variierten Bewegungen dieselben bleiben müssen.

Später werden wir annehmen, daß die Bewegung dieser  $n$  materiellen Punkte eine zyklische oder eine damit verwandte ist. Vorläufig aber wollen wir sie noch ganz allgemein lassen.

Diese  $n$  Punkte bilden das betrachtete mechanische System. Außerdem sollen noch dreierlei materielle Punkte wirksam sein.

1. Mit den  $n$  materiellen Punkten sollen zunächst andere ( $n'$ ) in Wechselwirkung stehen, welche letztere ihre Lage im Raume immer unverändert beibehalten und daher ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit auch zu den  $n$  Punkten hinzugerechnet werden können. Es könnte sich z. B. beim Zentralbewegungsmodelle an der Stelle, wo der Faden durch das Loch geht, eine fixe unveränderliche Masse befinden, welche eine beliebige Zentralkraft auf das Kügelchen  $m$  ausübt. Solche Massen könnten auch anderswo in der Bahnebene des Kügelchen fix verteilt sein.

2. Außerdem sollen mit den  $n$  materiellen Punkten andere  $v$  in Wechselwirkung stehen, deren durch  $g$  generalisierte Koordinaten (die langsam veränderlichen Variablen

oder Parameter) bestimmte Lage manches Mal ganz unverändert, manches Mal wieder außerordentlich langsam veränderlich ist. Die  $\nu$  Punkte werden bezüglich des betrachteten Systems als äußere angesehen. Sie entsprechen dem Magnete des Zentralbewegungsmodells.

3. Es sind noch andere ( $N$ ) materielle Punkte vorhanden, welche bloß auf die  $\nu$  Punkte, also gar nicht auf die  $n$  Punkte wirken sollen und daher ganz außerhalb des betrachteten Systems stehen. Die Kräfte, welche sie auf die ersteren Punkte ausüben, müssen den Kräften, welche die  $n$  Punkte auf die  $\nu$  Punkte ausüben, vollständig das Gleichgewicht halten, solange die letzteren vollständig ruhen, der Zustand muß von dem des Gleichgewichtes sehr wenig verschieden sein, wenn sich die  $\nu$  Punkte langsam bewegen. Es sind dies am Zentralbewegungsmodelle die Kräfte, welche am Magnete den Kräften, die der Pol  $A$  auf ihn ausübt, das Gleichgewicht halten müssen.

$T$  sei die lebendige Kraft der  $n$  Punkte,  $P$  die Kraftfunktion aller von ihrer Wechselwirkung untereinander und der Wirkung der  $n'$  Punkte auf sie herstammenden Kräfte. Die Arbeit aller dieser Kräfte nennen wir die innere Arbeit, die der Kräfte, welche von den  $\nu$  Punkten auf die  $n$  Punkte ausgeübt werden (der äußeren Kräfte), nennen wir die äußere Arbeit. Die äußere Kraft nach einer Koordinate  $p_h$  der  $n$  Punkte, d. h. diejenige, welche vermöge der Wechselwirkung der  $n$  und der  $\nu$  Punkte darauf wirkt, soll mit  $\mathfrak{P}_h$  bezeichnet werden. Die zwischen den  $n$  und den  $\nu$  Punkten wirkenden Kräfte sollen ebenfalls eine Kraftfunktion haben, welche mit  $\Omega$  bezeichnet werden soll; dagegen soll die Gesamtkraftfunktion  $P + \Omega$  aller zwischen den  $n$ ,  $n'$  und  $\nu$  Punkten wirkenden Kräfte  $V$  heißen. Sobald man es vorzieht von den  $\nu$  Punkten gar nicht zu sprechen, ist die äußere Einwirkung auf die  $n$  Punkte einfach durch die Kräfte  $\mathfrak{P}_h$  bestimmt, welche die Kraftfunktion  $\Omega$  haben, die aber dann mit der Zeit langsam veränderliche Parameter enthält.

Es sollen sich zuerst die  $n$  materiellen Punkte bei unveränderlicher Lage der  $\nu$  Punkte während der Zeit  $t_1 - t_0$

bewegen, was wir als deren unvariierte Bewegung bezeichnen wollen. Die analog der Formel 236) berechneten Mittelwerte von  $T$ ,  $V$  etc. während dieser Zeit sollen mit  $\bar{T}$ ,  $\bar{V}$  etc. bezeichnet werden.

Wir vergleichen mit der unvariierten Bewegung zunächst eine andere Bewegung, welche in unendlich wenig verschiedener Weise geschieht, zur selben Zeit  $t_0$ , wie die unvariierte Bewegung beginnt, und zu einer von  $t_1$  unendlich wenig verschiedenen Zeit  $t_1 + \delta t_1$  endet.

Irgend einem Zustande  $A$  der unvariierten Bewegung, welcher zu irgend einer Zeit  $t$  stattfindet, korrespondiert immer derjenige Zustand  $B$  der variierten Bewegung, welcher zur selben Zeit  $t$  stattfindet. Im Zustande  $B$  soll die lebendige Kraft  $T$  der  $n$  Punkte um  $\delta T$  größer sein als im Zustande  $A$ .

Die Werte der  $s$  Koordinaten sämtlicher  $n$  Punkte werden ebenfalls im Zustande  $B$  etwas andere sein als im Zustande  $A$ . Die durch diesen Umstand allein bewirkten Zuwächse von  $F$ ,  $\Omega$  und  $V$  bezeichnen wir mit  $\delta F$ ,  $\delta \Omega$  und  $\delta V$ . Ist ferner

$$240) \quad P_h = - \frac{\partial F}{\partial p_h} + \mathfrak{P}_h$$

die gesamte, nach einer Koordinate  $p_h$  des Systems der  $n$  Punkte wirkende generalisierte Kraft, so ist also:

$$241) \quad \delta F + \delta \Omega = \delta V = - \sum_1^n P_h \delta p_h.$$

Es ist also  $\delta V$  genau die auch im Vorhergehenden immer so bezeichnete Größe und stellt den Gesamtbetrag der dem Systeme der  $n$  Punkte zugeführten Energie dar, welcher auf Arbeitsleistung gegen alle auf die  $n$  Punkte wirkenden Kräfte verwendet wird. Da ferner  $\delta T$  den Zuwachs der lebendigen Kraft dieser Punkte darstellt, so müßte den  $n$  Punkten irgendwie die Gesamtenergie

$$242) \quad \delta E = \delta T + \delta V = \delta J_n + \delta \Omega = \delta J_{n,v} - \delta_v \Omega$$

zugeführt werden, um den Zustand  $A$  des Systems in den Zustand  $B$  überzuführen. Die Kräfte, welche diese Energie



Zufuhr bewirken und auf welche wir jetzt allein den Namen Zusatzkräfte beschränken wollen, sind ganz neue Kräfte, welche von allen während der unveränderten Bewegung wirkenden völlig verschieden sind. Diese Energie  $\delta E$  stellen wir mit der einem Körper zugeführten Wärme  $\delta Q$  in Parallele,  $J_n = T + F$  dagegen, oder auch, wenn wir lieber wollen,  $J_{n,n} = T + V$ , setzen wir mit der gesamten inneren Energie eines warmen Körpers, der lebendigen Kraft der Molekularbewegung und der auf innere Arbeitsleistung verwendeten Wärme in Parallele.

#### § 46. Das erweiterte System.

Die Zuwächse der Kraftfunktionen  $\Omega$  und  $V$ , welche daher rühren, daß im Zustande  $B$  auch die  $\nu$  materiellen Punkte etwas andere Lagen haben als im Zustande  $A$ , sollen mit  $\delta_r \Omega$  und  $\delta_r V$  bezeichnet werden, so daß der totale Zuwachs, den die Größen  $V$  und  $\Omega$  beim Übergang vom Zustande  $A$  in den Zustand  $B$  erfahren,

$$243) \quad \delta_{\text{tot.}} V = \delta V + \delta_r V, \quad \delta_{\text{tot.}} \Omega = \delta \Omega + \delta_r \Omega$$

ist, und der Ausdruck

$$244) \quad \delta J_{n,\nu} = \delta T + \delta V + \delta_r V$$

den totalen Zuwachs der Gesamtenergie  $J_{n,\nu} = T + V$  des erweiterten Systems der  $n + \nu$  Punkte darstellt.

Man kann daher sagen: Wenn die Überführung aus dem unveränderten in den veränderten Zustand gerade zur Zeit  $t$  stattfände, so daß gerade der Zustand  $A$  in den Zustand  $B$  übergeführt würde, so würde dem System der  $n$  Punkte von den Zusatzkräften die Energie  $\delta E$ , durch die Einwirkung der  $\nu$  Punkte die Energie  $-\delta \Omega$  zugeführt, so daß seine innere Energie um  $\delta J_n = \delta T + \delta F$  wächst oder es wird von der ganzen, durch Zusatzkräfte zugeführten Energie  $\delta E$  der Teil  $\delta T + \delta F$  auf Vermehrung der Eigenenergie, der Anteil  $\delta \Omega$  aber auf äußere Arbeitsleistung verwendet.

$\Omega$  ist die Kraftfunktion der Wechselwirkung der  $n$  und der  $\nu$  Punkte. Da es sich hier bloß um ein mechanisches

Bild gewisser Naturerscheinungen handelt, so ist es vollkommen willkürlich, welche Punkte man dem betrachteten Systeme zuzählt und welche man als äußere ansieht. Es kann in dem einen Falle die eine, in dem anderen wieder eine andere Analogie mit den Eigenschaften warmer Körper besonders hervortreten. Man kann daher auch die  $\nu$  Punkte noch zum betrachteten Systeme rechnen, so daß dann

$$V = F + \Omega$$

die potentielle, und

$$J_{n,\nu} = T + V = T + F + \Omega$$

die totale Energie des gesamten betrachteten Systems ist. Dann wäre wieder  $\delta T + \delta V$  mit der zugeführten Wärme aber jetzt  $\delta_\nu V = \delta_\nu \Omega$  mit der in Form von äußerer Arbeit dem Systeme zugeführten Energie in Parallele zu setzen, —  $\delta_\nu \Omega$  der auf äußere Arbeitsleistung aufgewendeten Wärme,

Wenn die Kräfte, welche die Kraftfunktion  $\Omega$  haben, keine gewöhnlichen Fernkräfte sind, sondern den Wert Null haben, bei einer gewissen Entfernung der Punkte, zwischen denen sie wirken, bei etwas größerer oder kleinerer Entfernung aber sofort ins Unendliche anwachsen, so ist ohnedies  $\Omega$  konstant, daher

$$\delta \Omega + \delta_\nu \Omega = 0$$

und es kommen beide Auffassungen auf dasselbe hinaus. Bei dem Zentrifugalmodell ist diese Bedingung ohne weiteres erfüllt; beim Bilde eines von einem Stempel abgeschlossenen Gases kann man sich dieselbe jedenfalls ohne wesentliche Modifikation des Problems erfüllt denken, da ja auch in diesem Falle nur ein verschwindender Energiebetrag auf Veränderung der Kraftfunktion derjenigen Kräfte verwendet wird, die zwischen den Gasmolekülen und denjenigen des Stempels tätig sind, also die Variationen von  $\Omega$  nicht in Betracht kommen.

Mit  $\mathfrak{P}_h$  haben wir die Kräfte bezeichnet, welche die  $\nu$  Punkte auf die  $n$  Punkte ausüben (der Stempel auf das Gas). Gleiche und gleich bezeichnete Kräfte üben für den Fall der Ruhe der  $\nu$  Punkte die  $N$  Punkte auf die  $\nu$  Punkte

aus (die Hand oder belastende Gewichte von der Außenseite auf einen leicht beweglichen, das Gas abschließenden Stempel). Gleiche entgegengesetzt bezeichnete Kräfte üben die  $n$  auf die  $\nu$  oder die  $\nu$  auf die  $N$  Punkte aus. Für eine außerordentlich langsame Bewegung der  $\nu$  Punkte, wobei der ganze Prozeß nahezu umkehrbar ausfällt (umkehrbare Ausdehnung des Gases), gilt das eben Gesagte wenigstens mit sehr großer Annäherung.

Es ist daher  $-\delta_\nu V$  auch die Arbeit, welche vermöge der Bewegung der  $\nu$  Punkte gegen die Kräfte geleistet wird, die von den  $N$  auf die  $\nu$  Punkte ausgeübt werden und bewirken, daß letztere bei der unvariirten Bewegung in Ruhe bleiben, bei der variirten aber sich nur überaus langsam bewegen. Letztere Kräfte sind nämlich den Kräften  $\mathfrak{F}_h$  vollständig gleich.

#### § 47. Anwendung des Prinzips der kleinsten Wirkung.

Es hat nun  $\delta E$ ,  $\delta T$  und  $\delta V$  dieselbe Bedeutung wie in Formel 223 § 36.  $V$  enthält allerdings außer den Koordinaten der  $n$  auch noch die der  $\nu$  Punkte und die die letzteren enthaltenden Ausdrücke spielen im Ausdrucke für die Kraftfunktion der  $n$  Punkte die Rolle langsam veränderlicher Parameter, sobald die  $\nu$  Punkte sich langsam bewegen; allein dies geschieht niemals, solange die Bewegung unvariirt bleibt. Während der unvariirten Bewegung ist daher  $V$  eine die Zeit nicht explizit enthaltende Funktion der Koordinaten der  $n$  materiellen Punkte und das allein ist zu Anfang des § 36 vorausgesetzt. Die durch unendlich kleine Bewegung der  $\nu$  Punkte eintretenden Wirkungen werden dort zu den Zusatzkräften gerechnet. Es gilt daher hier wieder die Gleichung 223), nämlich:

$$2\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta E dt + \sum_1^s (q_h^1 \delta p_h^1 - q_h^s \delta p_h^s).$$

Wir haben bisher die unvariirte Bewegung während der Zeit  $t_1 - t_0$  und daneben ganz davon unabhängig die variirte während der Zeit  $t_1 + \delta t_1 - t_0$  betrachtet.

Wir wollen uns jetzt mit der Betrachtung des Überganges von der einen zur anderen beschäftigen. Da ist es zunächst vollkommen gleichgültig, zu welchem oder zu welchen im Verlauf der ganzen Zeit  $t_1 - t_0$  liegenden Zeitmomenten die Zusatzkräfte den  $n$  Punkten Energie zugeführt haben. Dagegen ist es nicht gleichgültig, ob die gesamte Verrückung der  $\nu$  Punkte in einem einzigen zwischen  $t_0$  und  $t_1$  liegenden Momente geschah oder sich aus mehreren Verrückungen zusammensetzte und wann im Verlauf der Zeit  $t_1 - t_0$  diese eine resp. jede der Partialverrückungen stattfand. Der Wert, den der Zuwachs  $\delta E - \delta \Omega = \delta(T + F) = \delta J_n$  der Gesamtenergie der  $n$  Punkte und ebenso der Wert, den der Zuwachs  $\delta J_{n,\nu} = \delta T + \delta F + \delta_{\text{tot.}} \Omega = \delta T + \delta_{\text{tot.}} V$  der gesamten lebendigen Kraft und Kraftfunktion der  $n + \nu$  Punkte am Ende der Bewegung, also zur Zeit  $t_1 + \delta t_1$  hat, ist, wenn die Gesamtverschiebung der  $\nu$  Punkte dieselbe ist, natürlich davon unabhängig, wann diese Verschiebung stattfand. Dagegen ist die gesamte äußere Arbeit, sei es, daß wir dieselbe als  $\delta \Omega$  oder als  $-\delta_\nu \Omega$  definieren, davon abhängig, wann die Verschiebung der  $\nu$  Punkte stattfand, ebenso die Energie  $\delta T + \delta V$ , welche die Zusatzkräfte den  $n$  Punkten während der Zeit  $t_1 - t_0$  im ganzen zuführen müssen. Denn letztere ist gleich  $\delta T + \delta_{\text{tot.}} V - \delta_\nu \Omega = \delta T + \delta F + \delta \Omega$ .

Es sollen nun speziell die  $\nu$  Punkte während der ganzen Zeit  $t_1 - t_0$  der Bewegung sich gleichförmig aus der Lage, die sie für die unvariierte Bewegung haben, in die Lage hinüberbewegen, welche sie für die variierte Bewegung haben, so daß sie erstere Lage noch zur Zeit  $t_0$  haben, letztere aber gerade zur Zeit  $t_1$  erreichen. Während also die Bewegung der  $n$  Punkte mit großer oder kleiner Geschwindigkeit geschehen kann, sollen sich die  $\nu$  Punkte unendlich langsam, aber vollkommen gleichförmig bewegen, so daß sie während der endlichen Zeit  $t_1 - t_0$  nur sehr kleine Wege zurücklegen, weshalb wir die ihren Einfluß ausdrückenden Größen die langsam veränderlichen Parameter genannt haben.

Bezeichnen wir dann mit  $\delta_\nu \Omega$  die Arbeit, welche von den  $\nu$  Punkten gegen die von der Kraftfunktion  $\Omega$  her-

stammenden Kräfte geleistet werden müßte, wenn die ganze Verschiebung der „Punkte im Zeitmomente  $t$  vor sich ginge, so ist die bei der jetzt betrachteten allmählichen Verschiebung der „Punkte während der Zeit  $dt$  geleistete Arbeit gleich

$$\frac{\delta_r \Omega dt}{(t_1 - t_0)},$$

wobei  $\delta_r \Omega$  für die verschiedenen Phasen der Bewegung verschieden, daher eine Funktion von  $t$  ist. Die ganze von den „Punkten gegen die der Kraftfunktion  $\Omega$  entstammenden Kräfte während der Zeit  $t_1 - t_0$  geleistete Arbeit ist also im Falle der allmählichen Verschiebung der „Punkte

$$245) \quad \delta_r \Omega_1 = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \delta_r \Omega dt.$$

Wenn dabei auch passende Zusatzkräfte wirken, welche mit der Verschiebung der „Punkte zusammen die unvariante Bewegung in die variierte überführen, so daß sich die materiellen Punkte zur Zeit  $t_0$  noch in der Weise bewegten, welche der unvariierten Bewegung zu dieser Zeit entspricht, wogegen sie sich zur Zeit  $t_1 + \delta t_1$  genau in der Weise bewegen, welche ihnen in der variierten Bewegung zur Zeit  $t_1 + \delta t_1$  (der der Endzeit  $t_1$  der unvariierten Bewegung korrespondierenden Zeit) zukommt, so müssen die Zusatzkräfte den  $n$  materiellen Punkten die Energie

$$246) \quad \delta Q = \delta T + \delta_{\text{tot.}} V - \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \delta_r \Omega dt = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta V) dt$$

zuföhren. Wann während der Zeit  $t_1 - t_0$  und in welcher Weise die Zusatzkräfte wirken, ist hierbei gleichgültig, sobald nur der Effekt der ist, daß schließlich genau die variierte Bewegung erzeugt wurde. Dann wenn der ganze Energiezuwachs der „Punkte und die Gesamtverschiebung der „Punkte, also dadurch auch die nach außen abgegebene Energie dieselben sind, so ist dadurch die von den Zusatzkräften zugeführte Energie bestimmt.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Falls das System ein echt zyklisches ist, d. h. falls in der unvariierten Bewegung an die Stelle jeder Masse, die ihren Platz

Nun ist aber  $\delta T + \delta V$  dieselbe Größe, die in Formel 223 § 36 mit  $\delta E$  bezeichnet wurde und man erhält daher aus Gleichung 246

$$247) \quad (t_1 - t_0) \delta Q = 2\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt - \sum_1^s (q'_h \delta p_h^1 - q_h^0 \delta p_h^0).$$

: § 48. Betrachtung periodischer Bewegungen.

Falls sowohl die unvariierte als auch die variierte Bewegung periodisch sind, kann man sich die drei im vorigen Paragraphen behandelten Bewegungsarten, die unvariierte, die variierte und den allmählichen Übergang von der einen zur andern leicht zeitlich nacheinander realisiert denken. Ist  $i$  die Periode der unvariierten,  $i + \delta i$  die der variierten Bewegung, so kann man setzen  $t_1 = t_0 + i$ ,  $\delta t_1 = \delta i$ . Man kann sich dann zunächst mehrere Male während der Zeit  $i$  die unvariierte Bewegung vor sich gehend, dann während der Zeit  $i$  (auch  $2i, 3i$ ) die  $\nu$  Punkte langsam verschoben und auch die Zusatzkräfte wirkend und endlich mehrere Male während der Zeit  $i + \delta i$  die variierte Bewegung ablaufend denken. Man denkt sich dann alle diese Vorgänge nacheinander im Verlaufe der Zeit sich abspielend und kann, wenn man will, die Unterscheidung zwischen zeitlichen Änderungen und Variationen ganz fallen lassen.

verläßt, sogleich eine andere gleich beschaffene, mit einer gleichen gleichgerichteten Geschwindigkeit begabte Masse tritt, so daß die  $\nu$  Punkte auf die letztere genau so wie auf die erstere wirken und falls dasselbe auch für die variierte Bewegung stattfindet, so hat  $\delta, \Omega$  für alle  $t$  den gleichen Wert und die obige Formel gilt auch, wenn die  $\nu$  Punkte sich nicht gleichförmig aus der unvariierten in die variierte Lage bewegen, die äußere Arbeit ist dann ganz davon unabhängig, wann die Verschiebung der  $\nu$  Punkte erfolgt. Doch wird noch immer vorausgesetzt, daß die Gesamtbewegung der  $\nu$  Punkte während der Zeit  $t_1 - t_0$  sehr klein ist. Selbst wenn sie ruckweise erfolgt, so darf immer nach endlicher Zeit wieder ein nur unendlich kleiner Ruck geschehen. Unter dieser Bedingung kann man dann die Größen, welche den Einfluß der  $\nu$  Punkte ausdrücken, noch immer als die langsam veränderlichen Parameter betrachten.

In diesem Falle, daß sowohl die unvariierte Bewegung als auch die variierte periodisch sind, worden auch, wie wir gesehen haben, die Variationen an beiden Grenzen gleich und es ist:

$$\delta Q = \frac{2}{t_1 - t_0} \delta \left( \int_{t_0}^{t_1} T dt \right) = \frac{2}{i} \delta(i \bar{T}),$$

daher

$$248) \quad \frac{\delta Q}{T} = 2 \frac{\delta(i \bar{T})}{i \bar{T}} = \delta l(i \bar{T})^2,$$

wobei  $l$  den natürlichen Logarithmus bezeichnet. Nun herrscht eine nahezu vollständige Analogie mit dem zweiten Hauptsatze.

Man gehe zu immer anderen und anderen variierten Bahnen über, wobei auch die „Punkte immer andere und andere Lagen annehmen, sich aber unendlich langsam gegenüber den „Punkten bewegen oder bei zyklischer Bewegung der „Punkte vielleicht auch immer nach einer endlichen Zeit einen unendlich kleinen Ruck machen sollen. In dieser Weise variire man die Bewegung fortwährend, bis man endliche Änderungen aller Größen erhält, und durchlaufe schließlich einen vollständigen Kreisprozeß, d. h. man kehre endlich wieder zur selben Bewegung der „Punkte, verbunden mit gleicher Lage der „Punkte, zurück, ohne daß man jedoch genau dieselben Bewegungen der „Punkte und Lagen der „Punkte einfach in umgekehrter Reihenfolge wiederkehren ließ.

Dann wird die Summe aller hierbei durch die Zusatzkräfte den „Punkten zugeführten Energie, welche wir einfach mit  $\int \delta Q$  bezeichnen wollen, für alle diese Variationen der Zustände im allgemeinen nicht verschwinden, obwohl man zum Schluß wieder zum Anfangszustande zurückgekehrt ist. Dagegen wird

$$\int \frac{\delta Q}{T}$$

immer gleich Null sein. Denn  $\delta Q/\bar{T}$  ist nach 248) der Zuwachs von  $l(i \bar{T})^2$ ,  $\int \frac{\delta Q}{T}$  ist also die Differenz der Werte

von  $l(i\bar{T})^2$  im Anfangs- und Endzustande. Da im betrachteten Falle aber der Anfangs- und Endzustand identisch sind, so muß diese Differenz Null sein.

Wenn man z. B., was wir den Prozeß  $A$  nennen wollen, zuerst die  $\nu$  Punkte verschiebt, dann die Bewegung der  $n$  Punkte beschleunigt, dann die  $\nu$  Punkte wieder in ihre alte Lage bringt und schließlich den  $n$  Punkten wieder so viel Energie entzieht und auch ihre Geschwindigkeitsrichtungen gerade so ändert, daß ihre Bewegung genau wieder die alte wird, so wird  $\int \delta Q / \bar{T}$  immer verschwinden. Dagegen wird  $\int \delta Q$  im allgemeinen nicht Null sein. Letzterer Ausdruck wird natürlich von gleichem Absolutwerte, aber entgegengesetzt bezeichnet sein, wenn man irgend eine Reihe von Bewegungszuständen der  $n$  und Lage der  $\nu$  Punkte gerade in der entgegengesetzten Weise durchläuft. (Prozeß  $B$ .)

Dem Prozesse  $A$  entspricht der folgende Vorgang: man läßt ein Gas sich zuerst ausdehnen, dann erwärmt man es, drückt es dann bei der höheren Temperatur auf das alte Volumen zusammen und kühlt es schließlich wieder ab, bis es den alten Zustand angenommen hat, alles in umkehrbarer Weise. Die direkte Umkehr eines solchen Vorganges entspricht dann dem Prozesse  $B$ .

Die von uns betrachteten Systeme unterscheiden sich insofern von warmen Körpern, als ihr Zustand durch ihre Energie und die Lage der  $\nu$  Punkte (die äußere Umgebung) noch keineswegs bestimmt ist. So kann sich z. B. der materielle Punkt  $m$  des Beispiels 2 des § 44 bei gleicher Energie und gleicher äußerer Umgebung im Kreise oder in einer ellipsenartigen Bahn etc. bewegen.

Da  $\int \frac{dQ}{\bar{T}}$  (die Entropie)  $= 2l(i\bar{T})$  ist und jede Funktion derselben mit dem integrierenden Faktor multipliziert wieder integrierender Faktor sein muß, so ist auch  $i$  integrierender Faktor von  $dQ$ . Da  $i$  die Zeit ist, innerhalb welcher ein Teilchen einen ganzen Umlauf macht, so ist  $1/i$  die (ganz oder echt oder unecht gebrochene) Zahl der zyklischen Umläufe in der Zeiteinheit.



Unter einer periodischen Bewegung verstanden wir in diesem Paragraphen selbstverständlich eine solche, bei welcher nach Ablauf der Periode dieselben Werte der rechtwinkligen Koordinaten aller materiellen Punkte wiederkehren. Während, wie wir sahen, periodische Bewegungen die vollkommenste Analogie mit dem zweiten Hauptsatze zeigen, so gibt uns die am Schlusse des § 41 und in § 44 als Beispiel 2 behandelte Zentralbewegung in einer angeschlossenen Bahn ein Beispiel einer nicht periodischen Bewegung von folgenden Eigenschaften: sie ist sonst den in diesem Paragraphen behandelten sehr ähnlich und kann sogar durch Betrachtung unendlich vieler in der gleichen Ebene bewegter Massenpunkte in eine echt zyklische (allerdings nicht monozyklische) verwandelt werden; doch verschwindet für dieselbe schon bei fixer Lage der  $n$  Punkte (der Magnete, von denen die Werte von  $\lambda$  und  $\alpha$  abhängen), daher um so mehr bei variierender Lage der  $n$  Punkte,  $\int \delta Q / T$  über einen vollständigen Kreisprozeß erstreckt nicht, ja  $\delta Q$  hat überhaupt keine integrierende Faktoren.

Nur durch die Annahme des gleichzeitigen Vorhandenseins sehr vieler Systeme mit allen möglichen Flächen- und Geschwindigkeiten, unter denen die Zustände nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung verteilt sind, kann in diesem Falle die Analogie mit dem zweiten Hauptsatze der Wärmelehre wiederhergestellt werden.

Durch die gleiche Annahme wird auch der oben erwähnte Mangel an Analogie zwischen warmen Körpern und dem von uns jetzt betrachteten Systeme von  $n$  materiellen Punkten beseitigt, daß der Zustand der ersteren zur vollen Bestimmtheit außer der Angabe der äußeren Umstände nur der des Wertes einer Variablen (der Temperatur) bedarf, während auf die Bewegung der betrachteten Systeme nebst der Lage der  $n$  Punkte und dem Energieinhalte noch andere die Anfangsbewegung der  $n$  Punkte bestimmende Integrationskonstanten ihrer Bewegungsgleichungen von Einfluß sein können. Hierauf soll jedoch hier nicht näher eingegangen werden.

## § 49. Theorie der Zykeln.

Wir gehen nun speziell zur Entwicklung einiger Lehrsätze aus der Theorie der Zykeln über. Wir verstehen, wie schon erwähnt, unter zyklischen Koordinaten schlechtweg solche, welche undifferenziert weder im Ausdrucke für lebendige Kraft noch auch in dem für die wirkenden Kräfte oder etwa vorhandenen Bedingungsgleichungen vorkommen. Wie ebenfalls bereits erwähnt, sind, falls keine Kräfte im gewöhnlichen Sinne der Mechanik und keine die Bewegungsfreiheit beschränkenden Bedingungen existieren, auch die rechtwinkligen Koordinaten zyklische. Allein sie definieren keine finite, d. h. keine Bewegung, bei welcher für beliebige Zeiten die rechtwinkligen Koordinaten und ihre Differentialquotienten nach der Zeit zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen sind. Dagegen ist die Variable, welche die Winkelstellung des im § 44 als Beispiel 3 beschriebenen Zentrifugalmodells definiert, eine zyklische Koordinate im erweiterten Hertzschen Sinne, welche, obwohl sie selbst mit wachsender Zeit ins Unendliche wachsen kann, doch unter allen Umständen eine finite Bewegung bestimmt.

Eine echt zyklische Koordinate dagegen ist eine solche, welche eine echt zyklische Bewegung bestimmt, d. h. wenn sie unter Konstanthaltung aller anderen Koordinaten veränderlich ist, so muß an die Stelle jeder Masse, welche ihren Ort im Raume verläßt, sogleich wieder eine andere vollkommen gleich beschaffene mit der gleichen Geschwindigkeit in gleicher Richtung bewegte Masse treten, worin das Merkmal der echt zyklischen Bewegung besteht.

Es sei ein System gegeben, welches folgende Bedingungen erfüllt: 1. unter den Variablen, welche die Position seiner materiellen Punkte bestimmen, seien zyklische. 2. Gegenüber den Änderungsgeschwindigkeiten der zyklischen Variablen (den zyklischen Geschwindigkeiten) seien die Differentialquotienten nach der Zeit (Änderungsgeschwindigkeiten) der übrigen Variablen, welche zur Bestimmung dieser Position außerdem noch erforderlich sind, sehr klein; diese letzteren

Variablen heißen deshalb die langsam Veränderlichen oder die Parameter; endlich 3. seien die zyklischen Beschleunigungen ebenfalls sehr klein gegenüber den zyklischen Geschwindigkeiten, d. h. die Änderungen der zyklischen Geschwindigkeiten, welche innerhalb von Zeiträumen eintreten, während denen sich die Absolutwerte der zyklischen Koordinaten schon sehr bedeutend verändert haben, seien noch immer sehr klein. Dann nennen wir das System ein zyklisches System oder noch kürzer ein Zykel.

Ist seine Bewegung zudem eine finite, so nennen wir es ein finites Zykel. Sind die zyklischen Variablen lauter echt zyklische, so nennen wir es ein echtes Zykel. Ist nur eine unabhängige zyklische Variable vorhanden, so heißt das System ein Monozykel; sind deren zwei, so heißt es ein Bizykel; sonst im allgemeinen ein Polyzykel; wenn  $n$  unabhängige zyklische Variablen vorhanden sind, ein  $n$ -Zykel.

An dem äußerlich wahrnehmbaren Zustande eines echten Zyklus ist also, solange die Parameter konstant bleiben, trotz der lebhaften Bewegung innerhalb desselben keine Veränderung bemerkbar. Es zeigt sich dies an warmen Körpern, an Drähten, die von konstanten elektrischen Strömen durchflossen sind, aber auch an einem absolut symmetrischen, um seine Achse rotierenden Kreis oder einer vollkommen homogenen, in einer in sich zurücklaufenden Röhre strömenden Flüssigkeit. Wenn dagegen die zyklischen Geschwindigkeiten und die Parameter sich langsam ändern, so entspricht dies einem Gase, welches langsam erwärmt oder umkehrbar ausgedehnt oder komprimiert wird. Ein anderes Beispiel ist die langsame Intensitätsänderung oder mechanische Ortsveränderung eines von einem elektrischen Strom durchflossenen Drahtes, oder die langsame Bewegung oder Deformation eines rotierenden Körpers oder eines von ponderabler Flüssigkeit durchströmten Kanals.

Man kann die in den §§ 45—47 entwickelten allgemeinen Formeln auf Zykeln anwenden, dabei aber manche Vereinfachungen anbringen. Das Zykel soll wieder aus  $n$  materiellen Punkten bestehen, deren Lage also teils durch zyklische, teils durch langsam veränderliche Koordinaten

bestimmt ist. Erstere wollen wir mit  $p_b$ , letztere mit  $p_a$  bezeichnen. Zwischen ihnen sollen keine Bedingungsgleichungen mehr bestehen. Diese  $n$  materiellen Punkte entsprechen denjenigen, welche wir auch in den §§ 45—47 die  $n$  materiellen Punkte nannten.

Da die  $p_b$  nicht indifferenziert in dem Ausdrucke für  $T$  vorkommen, so sind die nach den zyklischen Koordinaten  $p_b$  wirkenden Kräfte (die zyklischen Kräfte)

$$249) \quad P_b = \frac{dq_b}{dt},$$

wobei

$$250) \quad q_b = \frac{\partial T}{\partial p_b}.$$

Die Kräfte  $P_b$  entsprechen den Zusatzkräften der §§ 45—47; die durch sie dem Zykel zugeführte Energie soll die zyklisch zugeführte heißen; sie entspricht der zugeführten Wärme.

Da ferner die Glieder, welche zweite Ableitungen der  $p_b$  oder  $p_a$  nach der Zeit enthalten oder welche bezüglich der  $p'_a$  von der 1. oder gar 2. Ordnung sind, als verschwindend angesehen werden gegenüber denjenigen, welche bloß  $p_a$  und  $p'_b$  enthalten, so sind die nach den Parametern  $p_a$  wirkenden Kräfte

$$251) \quad P_a = - \frac{\partial T}{\partial p_a}.$$

Da  $T$  eine homogene quadratische Funktion der  $p'_b$  ist, so können alle  $p'_b$  und  $p_a$  konstant, daher  $p''_b = p'_a = 0$  sein, wenn alle  $P_b$  verschwinden. Dagegen müssen, wenn dies stattfinden soll, die  $P_a$  im allgemeinen von Null verschiedene Werte haben. Wir unterscheiden nun verschiedene Klassen von nach den Parametern  $p_a$  wirkenden Kräften. Dieselben können teils von der Wechselwirkung der  $n$  Punkte herkommen, teils auch von der Wirkung anderer materieller Punkte, welche den  $n'$  Punkten der §§ 45—47 entsprechen und wie diese ein für allemal fix im Raume sein und die fixen materiellen Punkte heißen sollen. Sie können übrigens hier wie dort auch den  $n$  materiellen Punkten zugerechnet werden. Diese, teils von der Wechselwirkung der  $n$  Punkte, teils von der Einwirkung etwa vorhandener fixer materieller Punkte auf sie herrührenden Kräfte, welche wir also als

innere Kräfte bezeichnen, sollen jedenfalls eine skleronome Kraftfunktion haben, welche wir wieder mit  $F$  bezeichnen. Der gesamte aus dieser Ursache herstammende Anteil von  $P_a$  ist also  $-\frac{\partial F}{\partial p_a}$ .

Dazu müssen, damit die  $p_a$  konstant bleiben, im allgemeinen noch weitere Kräfte hinzukommen, welche wir mit  $\mathfrak{P}_a$  bezeichnen und die äußern nach den Parametern wirkenden Kräfte nennen. Die materiellen Punkte, von denen sie ausgehen, entsprechen den  $\nu$  materiellen Punkten der §§ 45—47 und sollen auch wieder die  $\nu$  materiellen Punkte heißen. Sie werden für das betrachtete System als äußere angesehen.

Wenn exakt  $p'_b = p'_a = 0$  ist, also die zyklische Bewegung vollkommen stationär ist, so bleibt auch die Lage der  $\nu$  Punkte vollständig unverändert und muß eine solche sein, daß exakt

$$252) \quad P_a = \mathfrak{P}_a - \frac{\partial F}{\partial p_a} = - \frac{\partial T}{\partial p_a}$$

ist. Dies entspricht dem, was wir in §§ 45—47 die unvariierte Bewegung genannt haben. Setzen wir hier in der Theorie der Zykeln wieder

$$253) \quad T - F = H, \quad T' + F' = E,$$

wobei die Buchstaben  $H$  und  $E$  dieselbe Bedeutung wie in §§ 45—47, aber eine etwas andere als in den übrigen Abschnitten dieses Buches haben, so können wir die Gleichungen 249) und 252) auch so schreiben:

$$254) \quad \mathfrak{P}_a = - \frac{\partial H}{\partial p_a}, \quad P_b = \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \dot{p}_b}.$$

Wenn die langsam veränderlichen Parameter und die Werte der  $p'_b$  sich sehr langsam verändern sollen, so müssen die  $\mathfrak{P}_a$  ein wenig von den durch die obigen Gleichungen gegebenen Werten und die  $P_b$  ein wenig von Null verschieden sein. Diese letzteren Kräfte entsprechen dann denjenigen, welche wir in §§ 45 bis 47 die Zusatzkräfte genannt haben und sollen auch hier wieder diesen Namen beibehalten. Die von ihnen zugeführte Energie, die zyklisch zugeführte Energie, entspricht in der Wärmetheorie der zugeführten Wärme.

Die langsame Veränderung, welche die zyklische Bewegung durch die Zusatzkräfte sowie vermöge des Umstandes erfährt, daß die von den  $\nu$  Punkten ausgehenden Kräfte nicht genau die durch die Gleichung 252) bestimmten Werte  $\mathfrak{P}_\nu$  haben, entspricht dem, was wir in den §§ 45—47 die Variation der Bewegung genannt haben; jedoch ist es gegenwärtig nicht notwendig, die durch die langsame Bewegung der  $\nu$  Punkte und die Wirksamkeit der Zusatzkräfte eintretende allmähliche Änderung der stationären zyklischen Bewegung als ein Problem der Variationsrechnung aufzufassen und die dabei eintretenden Zuwächse durch Verwendung des Zeichens  $\delta$  besonders hervorzuheben. Man kann vielmehr diese allmähliche Zustandsänderung als eine gewöhnliche unter dem Einfluß der Zusatzkräfte und der Lagenänderung der  $\nu$  Punkte im Verlaufe der Zeit stattfindende Bewegung auffassen. Es liegt dies besonders nahe bei den echten Zykeln, bei denen die unvariierte Bewegung gar keine sichtbare Zustandsänderung darstellt, so daß erst bei deren langsamer Variation wahrnehmbare zeitliche Veränderungen auftreten.

Die Worte von  $T$ ,  $V$  etc. für einen beliebigen Zeitpunkt der unvariierten Bewegung fallen für Zykeln mit den Mittelwerten  $\bar{T}$ ,  $\bar{V}$  etc. derselben Größen für die unvariierte Bewegung zusammen. Es ist gleichgültig, in welchem Zeitmomente der unvariierten Bewegung die Variation beginnt, welche ganz den Charakter einer unter dem Einflusse gegebener Kräfte stattfindenden mechanischen Bewegung hat und auch beliebig lange andauern, allmählich zu einer endlichen Variation wachsen und zu einer beliebigen Zeit enden kann. Wenn in irgend einer Phase derselben plötzlich  $p'_\nu = p''_\nu = 0$  wird, erhält man sofort die dieser Phase entsprechend zu denkende unvariierte Bewegung.

Es tritt hier deutlich zutage, wie die am Eingange dieses Buches betrachtete Variation ganz allmählich sich dem Charakter einer gewöhnlichen, im Verlaufe der Zeit stattfindenden Bewegung beliebig nähern kann, bei welcher nur einzelne Koordinaten viel rascher, andere viel langsamer veränderlich sind.

Wir wollen für diese allmählich mit der Zeit eintretenden Änderungen der zyklischen Bewegungen noch immer den Namen Variationen beibehalten und auch die Bewegungsgleichungen für die Änderungen der  $p_a$ , welche dadurch eintreten, daß die  $\mathfrak{P}_a$  nicht genau die durch die Gleichungen 252) und 254) gegebenen Werte haben, erst in § 53 aufschreiben.

§ 50. Der integrierende Faktor des Differentials der zyklisch zugeführten Energie.

Die Arbeit, welche während der Variation der zyklischen Bewegungen in der Zeit  $dt$  von der Kraft  $P_b$  geleistet wird, ist nach Gleichung 249):

$$255) \quad dQ_b = P_b dp_b = P_b p'_b dt = p'_b dq_b.$$

Die Summe  $dQ$  aller  $dQ_b$  ist die gesamte von allen Kräften  $P_b$  (den zyklischen oder Zusatzkräften) geleistete Arbeit, welche wir die dem Systeme zyklisch zugeführte Energie genannt haben und welche der zugeführten Wärme analog ist.

Falls das System ein Monozykel ist und man die einzige zyklische Variable ohne Index schreibt, so erhält man

$$dQ = p' dq$$

und wegen  $T = p' q$ ,

$$256) \quad \frac{dQ}{T} = \frac{dq}{q}.$$

Es ist also  $\frac{dQ}{T}$  ein vollständiges Differential und  $\int \frac{dQ}{T}$  die Entropie.

Diese Formel findet Anwendung auf alle echten Monozykeln, innerhalb deren beliebige Massen eine zyklische Bewegung machen, so daß sie alle innerhalb derselben Zeit  $i$  gleichzeitig zu ihrer Ausgangslage zurückkehren und dann von neuem dieselbe Bewegung machen. Solche Monozykeln werden von Helmholtz als einfache echte Monozykeln bezeichnet und man sieht leicht, daß sie einen Spezialfall der in § 48 behandelten periodischen Systeme bilden.

Wenn ein Zykel verschiedene Massensysteme besitzt, deren jedes eine in dieser Weise in sich zurücklaufende Bewegung macht, und wenn die Perioden  $i, i_1, i_2, \dots$  für die

verschiedenen Systeme verschieden sind, so heißt das System ein ungefesselltes, oder nur teilweise gefesselltes Polyzykel, sobald die Dauer dieser Perioden außer von den Werten der langsam veränderlichen Parameter auch noch von denen mehrerer unabhängiger zyklischer Geschwindigkeiten abhängt, dagegen ein vollständig gefesselltes Polyzykel, oder ein zusammengesetztes Monozykel, wenn sie außer von den Parametern nur noch von dem Werte einer einzigen zyklischen Geschwindigkeit abhängt. Wenn im letzten Falle die Zahl der Verhältnisse  $\frac{i_1}{i}, \frac{i_2}{i}, \dots$  eine endliche ist und die Werte dieser Verhältnisse von denen der Parameter (der langsam veränderlichen Koordinaten) vollkommen unabhängig sind, so kann man sich diese Verhältnisse ohne wesentliche Änderung der mechanischen Bedingungen als rationale, wenn auch mit sehr großem gemeinsamen Nenner denken und daher einen längeren Zeitraum  $J$  finden, innerhalb dessen die Bewegung aller Massensysteme gleichzeitig eine periodisch wiederkehrende ist, so daß das gesamte mechanische System ein einfaches echtes Monozykel von der Periode  $J$  darstellt und alles von einem solchen Bewiesene darauf anwendbar ist.

Dies wird aber zweifelhaft, wenn die Anzahl der Verhältnisse  $\frac{i_1}{i}, \frac{i_2}{i}, \dots$  eine unendlich große ist und gilt jedenfalls nicht mehr, wenn die Werte dieser Verhältnisse kontinuierliche Funktionen der Parameter sind, weil dann die zyklischen Koordinaten im Vereine mit den Parametern im allgemeinen nicht mehr ein System holonomener Koordinaten bilden.<sup>1)</sup> Alle entwickelten Formeln gelten aber nur für holonome Koordinaten; denn wie wir schon in § 4 auf S. 16

<sup>1)</sup> Borchards Journal Bd. 98, 1. Heft S. 87, 1885; Wien. Sitzber. Bd. 111, S. 1003 1902. Wenn z. B. die parallelen Drehungsachsen zweier Körper sich nach entgegengesetzter Seite konisch verjüngen und ein Transmissionsriemen oder eine Friktionscheibe so dazwischen kontinuierlich verschiebbar ist, daß sie bald einen dickeren Teil der ersten Achse mit einem dünneren der zweiten, bald wieder umgekehrt verbindet und man den Weg eines nicht in der Drehungsachse liegenden Punktes des ersten Körpers als zyklische, die Verschiebung  $\alpha$  des Riemens oder der Friktionscheibe als langsam ver-



in der Anmerkung erwähnten, werden im ganzen Buche, mit Ausnahme der §§ 27 und 28. unter generalisierten Koordinaten immer nur holonome generalisierte Koordinaten verstanden. Wir wollen hierauf nicht näher eingehen und nur noch den Beweis für einen sehr allgemeinen, von Helmholtz gefundenen Satz führen.

Sei ein beliebiges, zusammengesetztes monozyklisches (also vollständig gefesseltes polizyklisches) System gegeben, dessen langsam veränderliche Koordinaten mit  $p_a$ , dessen rasch veränderliche Koordinate mit  $p$  bezeichnet werden sollen. Es wird vorausgesetzt, daß bei passender Änderung der  $p_a$  die Bewegung in genau ähnlicher Weise vor sich gehen kann, wobei nur sämtliche Geschwindigkeiten mit einer konstanten, für alle Geschwindigkeiten gleichen, aber ganz willkürlichen Zahl  $n$  multipliziert, also gewissermaßen die Zeitdauer aller Vorgänge auf den  $n$ -ten Teil reduziert erscheint; wenn dann nur ein einziger langsam veränderlicher Parameter  $p_a$  vorhanden ist, so ist die gesamte im Systeme enthaltene lebendige Kraft immer integrierender Nenner des Differentials der von außen zugeführten Energie; sind dagegen mehrere  $p_a$  vorhanden, so gilt dies ebenfalls jedesmal dann, wenn jenes Differential überhaupt integrierende Faktoren besitzt.

Sei zunächst nur ein langsam veränderlicher Parameter  $p_a$  vorhanden, so werden zwei Gattungen von Zustandsänderungen möglich sein. Erstens bei ungeänderten Bahnformen ändert sich bloß die Geschwindigkeit aller beweglichen Teile proportional. Zweitens ändern sich die Bahnformen. Die Gestalt der Bahnen hängt daher nur von einer einzigen unabhängig veränderlichen Größe ab, während die andere

änderliche Koordinate wählt, so gelangt ein nicht in der Rotationsachse liegender Punkt des zweiten Körpers im allgemeinen nicht an dieselbe Stelle, wenn zuerst  $s$  um eine endliche Größe  $\sigma$  und dann  $a$  um eine ebenfalls endliche Größe  $\alpha$  wächst, oder wenn zuerst  $a$  um  $\alpha$  und dann erst  $s$  um  $\sigma$  wächst. Wenn also auch durch  $a$  und  $ds/dt$  sämtliche Geschwindigkeiten, also falls wir ein echtes Zykel vor uns haben, der ganze erkennbare Zustand desselben gegeben ist, so sind doch nicht durch die Angabe der Werte von  $a$  und  $s$  die Positionen sämtlicher Punkte des Systems bestimmt,  $a$  und  $s$  sind also nicht holonome verallgemeinerte Koordinaten.

unabhängig veränderliche Größe bloß die Geschwindigkeit bestimmt, mit welcher die Bahnen durchlaufen werden. Falls man daher die Grenzen immer so variiert, daß das letzte Glied der Gleichung 223) verschwindet, muß man bei der Rückkehr zur alten Bahn auch zu den ursprünglichen Grenzen zurückgelangen, die beiden Glieder in Gleichung 238) rechts werden identisch und  $dQ/T$  wird ein vollständiges Differential.

Falls mehr als ein langsam veränderlicher Parameter  $p_a$  existiert, ist  $T$  im allgemeinen nicht mehr integrierender Nenner von  $dQ$ , da man bei Wiederkehr zu genau demselben Zustande des Systems im allgemeinen nicht mehr zu denselben Integrationsgrenzen zurückkommen wird, sobald die Grenzen immer so geändert werden, daß das letzte Glied in Gleichung 223) verschwindet; doch läßt sich auch in diesem Falle beweisen, daß  $T$  integrierender Nenner sein muß, falls überhaupt integrierende Faktoren von  $dQ$  existieren. Sei allgemein  $dQ = M dN$  und man wähle  $T$  und die  $p_a$  als die independenten Variabeln.

Nach dem eben Bewiesenen muß, sobald alle  $p_a$  bis auf eines konstant sind,  $T$  integrierender Nenner von  $dQ$  sein; ist also  $g$  irgend einer der Indizes  $a$  und  $d\sigma_g$  das zum Faktor  $T$  hinzutretende Differential, so folgt zunächst:

$$257) \quad M \left( \frac{\partial N}{\partial T} dT + \frac{\partial N}{\partial p_g} dp_g \right) = T \left( \frac{\partial \sigma_g}{\partial T} dT + \frac{\partial \sigma_g}{\partial p_g} dp_g \right).$$

Diese Gleichung muß für alle Wertekombinationen der dabei als konstant vorausgesetzten Variabeln  $p_1, p_2, \dots, p_{g-1}, p_{g+1}, \dots$  gelten. Wenn also  $M$  und  $N$  gegeben sind, so ist daraus  $\sigma_g$  bis auf einen nur die letzterwähnten Variabeln enthaltenden Ausdruck bestimmt. Dasselbe gilt auch für jeden beliebigen anderen der Indizes  $a$ , z. B.  $h$ ; man hat also ebenso

$$258) \quad M \left( \frac{\partial N}{\partial T} dT + \frac{\partial N}{\partial p_h} dp_h \right) = T \left( \frac{\partial \sigma_h}{\partial T} dT + \frac{\partial \sigma_h}{\partial p_h} dp_h \right),$$

wobei natürlich die Identität von  $\sigma_g$  und  $\sigma_h$  noch nicht erwiesen ist. Aus dieser und der Gleichung (257) folgt unmittelbar:

$$259) \quad \frac{\partial \sigma_g}{\partial T} = \frac{\partial \sigma_h}{\partial T}.$$

Es können sich also  $\sigma_g$  und  $\sigma_h$  nur um Größen unterscheiden, welche kein  $T$ , sondern nur die  $p_a$  enthalten. Wir wollen setzen:  $\sigma_g = \sigma + \Pi_g$ ,  $\sigma_h = \sigma + \Pi_h$ , wobei die  $\Pi$  nicht mehr Funktionen von  $T$  sind; dann folgt aus der Gleichung 257)

$$260) \quad M \frac{\partial N}{\partial T} = T \frac{\partial \sigma}{\partial T}$$

und

$$261) \quad M \frac{\partial N}{\partial p_a} = T \left( \frac{\partial \sigma}{\partial p_a} + \frac{\partial \Pi_a}{\partial p_a} \right)$$

für jeden Wert von  $g$ ; hieraus ergibt sich weiter

$$262) \quad dQ = M dN = T \left( d\sigma + \sum \frac{\partial \Pi_g}{\partial p_g} dp_g \right),$$

die Summe ist über alle möglichen Werte des Index  $g$  zu erstrecken. Da laut Übereinkunft  $dQ$  einen integrierenden Faktor hat, so muß es jedenfalls auch einen besitzen, wenn man alle  $p_a$  bis auf zwei derselben, etwa  $p_g$  und  $p_h$ , konstant setzt. Dividiert man dann noch das Differential  $dQ$  durch  $T$ , so ergibt sich:

$$263) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial T} dT + \left( \frac{\partial \sigma}{\partial p_g} + \frac{\partial \Pi_g}{\partial p_g} \right) dp_g + \left( \frac{\partial \sigma}{\partial p_h} + \frac{\partial \Pi_h}{\partial p_h} \right) dp_h = \frac{dQ}{T}.$$

Nach dem Gesagten muß auch dieser Differentialausdruck einen integrierenden Faktor haben. Schreibt man die bekannte Bedingung dafür hin, so sieht man, daß aus derselben folgt: entweder

$$\frac{\partial \sigma}{\partial T} = 0$$

oder

$$264) \quad \frac{\partial^2 \Pi_g}{\partial p_a \partial p_h} = \frac{\partial^2 \Pi_h}{\partial p_g \partial p_a}$$

für alle Wertepaare von  $g$  und  $h$ . Die erste Gleichung kann nie erfüllt sein, da sonst bei Konstanthaltung der  $p_a$  zur Erhöhung der lebendigen Kraft gar keine Energiezufuhr notwendig wäre. Es müssen daher die Gleichungen 264) gelten, aus welchen folgt, daß  $\sum \frac{\partial \Pi_g}{\partial p_g} dp_g$  das komplette Differential einer Funktion  $\Pi$  der  $p_a$  ist, weshalb dann  $dQ = T d(\sigma + \Pi)$  wird.

## § 51. Adiabatische und isozyklische Bewegung.

Wenn für ein beliebiges Zykel alle  $P_b = 0$  sind, dagegen die  $\mathfrak{P}_a$  von den durch die Gleichungen 252) und 254) gegebenen Werten verschieden sind, so daß die Parameter  $p_a$  sich langsam verändern, so nennt man die Bewegung eine adiabatische. Dann folgt aus den Gleichungen 249), daß die Momente  $q_b$  bezüglich der zyklischen Koordinaten alle konstant sein müssen. Die zyklischen Geschwindigkeiten  $p'_b$  aber werden sich dann infolge der langsamen Änderung der Parameter allmählich ebenfalls langsam ändern. Wenn dagegen die  $P_b$  während der langsamen Änderung der Parameter stets solche Werte haben, daß die  $p'_b$  exakt unverändert bleiben, so nennt man die Bewegung eine isozyklische.

Ein Beispiel für die adiabatische Bewegung bildet ein um seine Achse rotierender Rotationskörper, oder das im § 44 als Beispiel 3. beschriebene Zentrifugalmodell, wenn niemals ein um die Rotationsachse drehendes Moment wirkt. Dagegen macht das Zentrifugalmodell eine isozyklische Bewegung, wenn durch passendo, an der Kurbol wirkende Kräfte  $\mathfrak{P}_b$  seine Umdrehungsgeschwindigkeit stets konstant erhalten wird, obwohl sich die verschiebbare Masse  $m$  der Drehungsachse bald langsam nähert, bald langsam davon entfernt.

Physikalische Analogien für die adiabatische Bewegung sind warme Körper, bei deren Zustandsänderung Wärme weder zugeführt noch entzogen wird (daher der Name adiabatisch auch für die analogen Bewegungen mechanischer Zykeln), elektrische Stromkreise, in denen unveränderliche elektromotorische Kräfte tätig sind, bewegte, mit konstanten Elektrizitätsmengen statisch geladene Leiter etc. Die entsprechenden physikalischen Vorgänge werden isozyklischen Bewegungen analog, wenn die Temperatur der warmen Körper, die Stromintensität der elektrischen Ströme, das Potential der elektrostatisch geladenen Leiter konstant erhalten wird. Bei einem rotierenden Körper tritt isozyklische Bewegung ein, wenn er in Riemen- oder Zahnrad-

verbindung steht (gekoppelt ist) mit einem rotierenden Schwungrade von unendlicher Masse oder einem zu Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit gezwungenen Körper; physikalische Analogien bietet ein warmer Körper, der mit einem unendlichen Wärmereservoir gut leitend verbunden ist, ein elektrischer Leiter, dessen Enden auf konstantem Potentialunterschied erhalten worden (mit den Polklemmen des Elektrizitätswerkes verbunden sind), in der Elektrostatik ein zur Erde abgeleiteter Körper, was Helmholtz auch als Koppelung mit der Erde, dem Wärmereservoir usw. bezeichnet.

In Gleichung 254) sind die partiellen Differentialquotienten so zu verstehen, daß die  $p'_b$  konstant zu halten sind, also die Zustandsänderungen isozyklisch zu geschehen haben. Wir wollen, wie es schon in § 9 geschah, partielle Differentialquotienten, bei deren Bildung die  $p'_b$  als konstant zu betrachten sind, mit dem Index  $p'$ , solche dagegen, bei deren Bildung die  $q_b$  als konstant zu betrachten sind, mit dem Index  $q$  bezeichnen.

Man kann daher sagen:  $H$  ist die Kraftfunktion der nach den Parametern  $p_a$  wirkenden Kräfte  $\mathfrak{P}_a$  für isozyklische Zustandsänderung, ihr entspricht in der Thermodynamik das isotherme thermodynamische Potential; bei jeder isozyklischen Bewegung ist

$$-\sum_a \frac{\partial H}{\partial p_a} dp_a = -dH = dF - dT$$

die von den auf das Cykel wirkenden Kräften  $\mathfrak{P}_a$  bei Änderung der  $p_a$  dem Zykel zugeführte (d. h. die in Form von äußerer Arbeitsleistung zugeführte) Energie. Da der ganze Energiezuwachs  $dE = dF + dT$  ist, so folgt  $dQ = 2dT$ , die zyklisch zugeführte Energie ist daher gleich dem doppelten Zuwachs der kinetischen Energie.

Nach Gleichung 63) ist

$$\frac{\partial_q T}{\partial p_a} = -\frac{\partial_{p'} T}{\partial p_a} \quad \text{daher} \quad \frac{\partial_q E}{\partial p_a} = -\frac{\partial_{p'} H}{\partial p_a}.$$

Man kann also die erste der Gleichungen 254) auch so schreiben:

$$265) \quad \mathfrak{P}_a = \frac{\partial_q E}{\partial p_a}.$$

Die äußeren Kräfte  $\mathfrak{P}_a$  können daher auch als die adiabatischen partiellen Differentialquotienten von  $\mathcal{E}$  nach den Koordinaten  $p_a$  und  $-\mathcal{E}$  als die adiabatische Kraftfunktion bezeichnet werden. Die gesamte, durch äußere Arbeitsleistung dem Systeme zugeführte Energie ist also bei adiabatischer Bewegung gleich  $d\mathcal{E}$ , also gleich dem gesamten Energiezuwachs, was selbstverständlich ist, da sie in diesem Falle die einzige Energiezufuhr ist.

Durch Anwendung des gefundenen Theorems, daß sowohl bei adiabatischer als auch bei isozyklischer Zustandsänderung die äußeren Kräfte eine Kraftfunktion haben, auf die Wärmetheorie erhalten wir folgenden Satz: Wenn ein warmer fester Körper durch beliebige äußere Kräfte adiabatisch oder isotherm beliebig deformiert wird, so ist die Deformationsarbeit immer ein vollständiges Differential, als ob die äußeren Kräfte solchen, die von ruhenden Massenteilchen herrühren, das Gleichgewicht hielten, wenn auch die Massenteilchen des Körpers in lebhaftester Wärmebewegung begriffen sind.

#### § 52. Hertz' reziproke Beziehungen.

1. Es möge sich der Zustand eines Zyklus langsam adiabatisch einmal so verändern, daß nur der Parameter  $p_a$  und  $dp_a$  wächst, das andere Mal so, daß nur der Parameter  $p_{a'}$  um  $dp_{a'}$  wächst. Im ersten Falle möge die nach  $p_{a'}$  wirkende äußere Kraft  $\mathfrak{P}_{a'}$  um  $d\mathfrak{P}_{a'}$ , im zweiten Falle die nach  $p_a$  wirkende äußere Kraft  $\mathfrak{P}_a$  um  $d\mathfrak{P}_a$  wachsen, dann ist immer

$$\frac{d\mathfrak{P}_{a'}}{dp_a} = \frac{d\mathfrak{P}_a}{dp_{a'}},$$

dasselbe gilt auch, wenn alle Bewegungen isozyklisch erfolgen, wir können diese beiden Relationen ausführlicher so schreiben:

$$\frac{\partial_a \mathfrak{P}_{a'}}{\partial p_a} = \frac{\partial_a \mathfrak{P}_a}{\partial p_{a'}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial_{a'} \mathfrak{P}_{a'}}{\partial p_{a'}} = \frac{\partial_{a'} \mathfrak{P}_a}{\partial p_a},$$

der Beweis folgt unmittelbar aus den Gleichungen 254) und 265), d. h. aus dem Umstande, daß die äußeren Kräfte sowohl für die adiabatische als auch für die isozyklische Zustandsänderung eine Kraftfunktion haben.

## 2. Wegen

$$\mathfrak{P}_a = -\frac{\partial F}{\partial p_a} - \frac{\partial_q T}{\partial p_a}, \quad \frac{\partial F}{\partial q_b} = 0 \quad \text{und} \quad p'_b = \frac{\partial T}{\partial q_b}$$

(letzteres nach 60)), findet man

$$266) \quad \frac{\partial \mathfrak{P}_a}{\partial q_b} = -\frac{\partial_q p'_b}{\partial p_a}.$$

Wenn daher ein bei Konstanz aller übrigen  $q$  und aller Parameter erfolgender Zuwachs eines zyklischen Momentes  $q_b$  um  $dq_b$  einen Zuwachs der nach einem Parameter  $p_a$  wirkenden Kraft  $\mathfrak{P}_a$  um  $d\mathfrak{P}_a$  bewirkt, so bewirkt ein adiabatischer und bei Konstanz der übrigen Parameter erfolgender Zuwachs von  $p_a$  um  $dp_a$  einen entgegengesetzt wie  $d\mathfrak{P}_a$  bezeichneten Zuwachs (eine Abnahme) der zyklischen Geschwindigkeit  $p'_b$  um  $dp'_b$  und zwar ist das Verhältniß der als Ursachen angenommenen Zuwächse  $dq_b$  und  $dp_a$  zu den als Wirkungen betrachteten Änderungen ( $d\mathfrak{P}_a$  und  $dp'_b$ ) gleich (wie Hertz sagt, das Verhältniß zwischen Ursachen und Wirkung ist in beiden Fällen gleich). Es ist unter diesen speziellen Umständen:

$$267) \quad \frac{d\mathfrak{P}_a}{dq_b} = -\frac{dp'_b}{dp_a}.$$

Da für ein Monozykel  $dp'_b$  und  $dq_b$  gleich bezeichnet sein muß, so gilt für ein solches auch folgender Satz: Wenn eine Vermehrung der zyklischen Geschwindigkeit  $p'$  bei Konstanz der Parameter die Kraft nach irgend einem Parameter  $p_a$  erhöht, so muß ein adiabatischer Zuwachs dieses Parameters bei Konstanz der anderen die zyklische Geschwindigkeit  $p'$  vermindern.

3. Es möge die Kraft  $P_b$  den in Gleichung 267) vorkommenden Zuwachs  $dq_b$  in der Zeit  $dt$  erzeugen, so ist  $dq_b = \dot{P}_b dt$ , andererseits ist  $\mathfrak{P}'_a = \frac{d\mathfrak{P}_a}{dt}$  die Geschwindigkeit, mit welcher dann die Kraft  $\mathfrak{P}_a$  unter den Umständen wächst, unter denen die Gleichung 267) gilt. Die linke Seite der Gleichung 267) ist daher gleich  $\mathfrak{P}'_a/P_b$  und wenn man für die rechte Seite wieder deuthlichkeitshalber zur Schreibweise der Gleichung 266) zurückkehrt, so folgt aus 267)

$$268) \quad \frac{\mathfrak{P}'_a}{P_b} = -\frac{\partial_q p'_b}{\partial p_a},$$

in Worten: Wenn alle Parameter konstant und alle nach den zyklischen Koordinaten wirkenden Kräfte bis auf eine ( $P_b$ ) gleich Null sind, so soll während der Zeit  $dt$  die nach dem Parameter  $p_a$  wirkende Kraft  $\mathfrak{P}_a$  um  $\mathfrak{P}'_a dt$  wachsen, dann bewirkt eine adiabatische Zunahme von  $p_a$  unter Konstanz der übrigen Parameter eine Abnahme von  $p'_b$  und es ist wieder das Verhältnis von Ursache und Wirkung in beiden Fällen gleich, wenn wir die Kraft  $P_b$  als Ursache, die Änderungsgeschwindigkeit  $\mathfrak{P}'_a$  der Kraft  $\mathfrak{P}_a$  als ihre Wirkung, und andererseits den Koordinatenzuwachs  $dp_a$  als Ursache und die Abnahme  $-dp'_b$  der zyklischen Geschwindigkeit  $p'_b$  als deren Wirkung betrachten.

4. Wegen

$$\mathfrak{P}_a = -\frac{\partial F}{\partial p_a} + \frac{\partial p'_b T}{\partial p_a} \quad \text{und} \quad q_b = \frac{\partial p'_b T}{\partial p'_b}$$

hat man

$$269) \quad \frac{\partial \mathfrak{P}_a}{\partial p'_b} = \frac{\partial p'_b q_b}{\partial p_a},$$

d. h. wenn bei Konstanz der übrigen zyklischen Geschwindigkeiten und der Parameter ein Zuwachs einer zyklischen Geschwindigkeit  $p'_b$  einen Zuwachs der nach einem Parameter  $p_a$  wirkenden äußeren Kraft  $\mathfrak{P}_a$  bewirkt, so bewirkt auch ein isozyklischer Zuwachs von  $p_a$  bei Konstanz der übrigen Parameter einen Zuwachs des zu  $p'_b$  gehörigen zyklischen Momentes  $q_b$  und zwar ist, wie Hertz abgekürzt sagt, wieder für unendlich kleine Zuwächse das Verhältnis von Ursache und Wirkung in beiden Fällen gleich. Auch hat für Monozykeln wieder der Zuwachs der zyklischen Geschwindigkeit dasselbe Vorzeichen, wie der des zyklischen Momentes.

5. Genau so, wie aus Gleichung 266) die Gleichung 268) gewonnen wurde, so können wir auch aus Gleichung 269) eine neue bilden. Bei Bildung des partiellen Differentialquotienten der rechten Seite der letzteren Gleichung ist angenommen, daß die  $\mathfrak{P}_a$  und  $P_b$  solche Werte haben, daß alle  $p'_b$  und alle Parameter mit Ausnahme eines einzigen  $p_a$  konstant bleiben. Die dabei nach der zyklischen Koordinate  $p_b$  wirkende Kraft soll  $P_b$ , die Zuwächse von  $p_a$  und  $q_b$  während



der Zeit  $dt$  aber sollen  $dp_a$  und  $dq_b$  heißen. Dann ist der Quotient  $\frac{dq_b}{dp_a}$  gleich der in Formel 269) mit  $\frac{\partial p'_b}{\partial p_a} q_b$  bezeichneten Größe, es ist aber auch  $dp_a = p'_a dt$  und  $dq_b = P_b dt$ ; daher

$$\frac{\partial p'_b q_b}{\partial p_a} = \frac{P_b}{p'_a}$$

und man kann die Gleichung 269) in der Form schreiben

$$270) \quad \frac{\partial \mathfrak{P}_a}{\partial p'_b} = \frac{P_b}{p'_a}.$$

In Worten ausgedrückt: Wenn bei Konstanz der übrigen zyklischen Geschwindigkeiten und der Paramotor ein Anwachsen einer zyklischen Geschwindigkeit  $p'_b$  einen Zuwachs, der nach einem Parameter  $p_a$  wirkenden Kraft  $\mathfrak{P}_a$  bewirkt, so muß behufs isozyklischen Wachsens von  $p_a$  bei Konstanz der übrigen Parameter in der Richtung der zyklischen Koordinate  $p_b$  eine positive Kraft  $P_b$  wirken und zwar ist wieder das Verhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen gleich, wenn man den Zuwachs von  $p'_b$  als Ursache, den Zuwachs von  $\mathfrak{P}_a$  als deren Wirkung, andererseits die Geschwindigkeit  $p'_a$ , mit welcher sich  $p_a$  isozyklisch ändert, als Ursache der Notwendigkeit der Kraft  $P_b$  und letztere als deren Wirkung bezeichnet.

Beim Beweise und der mathematischen Formulierung dieses Satzes ist in Hertz' Prinzipien der Mechanik Nr. 577) S. 245 überall das Zeichen  $\partial$  zu viel.

### § 53. Helmholtz' Sätze über gemischte Zykeln.

Helmholtz hat einige Betrachtungen von noch etwas größerer Allgemeinheit angestellt. Es sei wieder ein System von  $n$  Punkten gegeben, welches mit  $n'$  ein für allemal und für immer fixen Punkten in Wechselwirkung stehen kann, welche letztere Punkte man auch, wenn man will, zu den  $n$  Punkten zählen kann. Die Kraftfunktion aller zwischen diesen Punkten wirksamen Kräfte sei  $F$ , die kinetische Energie der  $n$  Punkte sei  $T$ . Wir setzen diesmal wieder, wie in

§§ 45—52, aber abweichend von unserer sonstigen Bezeichnungsweise

$$T + F = E,$$

$$T - F = H,$$

so daß  $E$  die gesamte Energie der  $n + n'$  Punkte ist. Unter den Koordinaten, welche die Position der  $n$  Punkte bestimmen, können zyklische sein, die wir wieder mit  $p_b$  bezeichnen wollen, d. h. ihre nicht nach der Zeit differentiierten Werthe sollen weder in  $T$  noch in  $F$  vorkommen. Bloß die  $p'_b$  sollen in  $T$  vorkommen. Die Gesamtanzahl dieser zyklischen Koordinaten sei  $\sigma$ . Die Gesamtkraft,  $-\partial F/\partial p_b$ , welche die  $n + n'$  Punkte nach irgend einer zyklischen Koordinate ausüben, muß also gleich Null sein. Die übrigen Koordinaten brauchen nicht gerade langsam veränderliche zu sein, sind also ganz beliebige Koordinaten. Wir nennen sie daher gewöhnliche Koordinaten und bezeichnen sie wieder mit  $p_a$ . Ihre Gesamtzahl sei  $s$ . Zwischen den  $p$  sollen keine Bedingungsgleichungen mehr bestehen. Ein solches System, welches zwar zyklische Koordinaten enthält, dessen übrige Koordinaten aber nicht oder wenigstens nicht alle als langsam veränderlich betrachtet werden, wollen wir ein gemischtes Zykel nennen und im Gegensatze dazu ein solches, welches nur zyklische und langsam veränderliche Koordinaten enthält, ein reines Zykel.

Am leichtesten wird das Verständniß der nun zu entwickelnden Gleichungen, wenn man sich die Beschaffenheit des Systems der  $n + n'$  Punkte und die Kraftfunktion  $F$ , sowie auch die Bewegung der Punkte, also deren sämtliche Koordinaten als Funktionen der Zeit, gegeben denkt und sich fragt, welche Kräfte  $P_b$  und  $\mathfrak{P}_a$  nach den zyklischen Koordinaten wirken resp. zu den vermöge der Kraftfunktion  $F$  nach den gewöhnlichen Koordinaten wirkenden Kräften noch hinzukommen müssen, um die gegebene zeitliche Veränderung der Koordinaten zu erzeugen. Es müssen dann für die zyklischen Koordinaten die Gleichungen 254) also

$$271) \quad P_b = \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p'_b}$$

und für die gewöhnlichen Koordinaten die gewöhnlichen Lagrangeschen Gleichungen

$$272) \quad \mathfrak{P}_h = \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p'_h} - \frac{\partial H}{\partial p_h}$$

gelten. Für jeden Index  $b$  und  $h$  sei

$$273) \quad \frac{\partial H}{\partial p'} = \frac{\partial T}{\partial p'} = q.$$

Die gesuchten Kräfte  $P_b$  und  $\mathfrak{P}_h$  sollen wieder von beliebigen äußeren (den  $v$ ) materiellen Punkten ausgehen, um die wir uns übrigens weiter gar nicht kümmern wollen. Sie können, wenn die Werte der  $p$  als Funktionen der Zeit gegeben sind, aus den Gleichungen 271) und 272) ebenfalls als Funktionen der Zeit gefunden werden, d. h. es kann die Frage beantwortet werden, welche äußere Kräfte  $P_b$  und  $\mathfrak{P}_h$  in jedem Momente zu den durch die Kraftfunktion  $F$  bedingten noch hinzukommen müssen, um die gegebene Bewegung zu erzeugen.

Natürlich ist die Gültigkeit der Gleichungen 271) und 272) ganz davon unabhängig, welche Größen man darin als gegeben betrachtet und nach welchen man fragt. Diese Gleichungen sind auch richtig, wenn die  $P_b$  und  $\mathfrak{P}_h$  als Funktionen der Zeit, ja selbst, wenn sie als Funktionen der Koordinaten, Geschwindigkeiten oder sonst beliebiger Größen gegeben wären und wenn die Aufgabe gestellt wäre, die Bewegung (d. h. die  $p''$  bei gegebenen Anfangswerten der  $p$  und  $p'$ ) zu bestimmen. Nur würden im letzten Falle auch die linken Seiten der Gleichungen 271) und 272) die zu suchenden Unbekannten enthalten. Ja es ist eigentlich vollkommen willkürlich, welche Kräfte man zur Kraftfunktion  $F$  als innere, welche zu den  $\mathfrak{P}_h$  als äußere rechnet, ob man die Körper, von denen gewisse Kräfte ausgehen, noch zum System rechnet oder als außenliegend ansieht, wenn man sich dann nur konsequent bleibt; so rechnet z. B. Helmholtz in der Elektrodynamik den galvanischen Leitungswiderstand bloß deshalb zu den  $\mathfrak{P}$ , weil er zu irreversibeln Vorgängen Anlaß gibt. Wir wollen aber behufs größerer Anschaulichkeit immer fingieren, daß  $F$  und die Bewegung

des Systems gegeben wäre und nach den zu ihrer Erhaltung notwendigen  $P_b$  und  $\mathfrak{P}_h$  gefragt werde.

Gleichungen von der Form der Gleichung 272) müssen auch an die Stelle der Gleichungen 252) und 254) treten, wenn man die in §§ 49—51 behandelte Theorie der Zykeln ohne jede Vernachlässigung entwickeln will oder überhaupt, wenn man die Frage lösen will, wie sich die langsam veränderlichen Parameter unter dem Einflusse gegebener  $\mathfrak{P}_a$  mit der Zeit verändern. Denn wenn man diese Frage beantworten will, so darf man offenbar nicht  $p_a'$  und  $p_a''$  vernachlässigen. In der Gleichung 271) und 272) aber findet sich keine Vernachlässigung mehr; denn die Bedingung, daß die zyklischen Koordinaten undifferenziert weder in  $T$  noch in  $F$  vorkommen, ist nicht bloß annäherungsweise, sondern vollkommen exakt realisiert.

Die Gleichung 272) hat die zu Anfang des § 34 angedeutete Form, welche man erhält, wenn man in der allgemeinen Lagrangeschen Gleichung 50) die  $\pi = 0$  setzt und dem  $V$  die Form 220) erteilt.

Es sollen zunächst sämtliche  $P_b = 0$  sein, so daß die zyklischen Bewegungen adiabatisch verlaufen.

Dann sind nach 271) die Größen

$$274) \quad \frac{\partial H}{\partial p'_b} = q_b$$

zu allen Zeiten konstant. Sind die Werte dieser Konstanten gegeben, so können mittels der  $\sigma$  Gleichungen 274) die  $\sigma$  Größen  $p'_b$  aus  $T$  und daher auch aus  $H$  eliminiert werden. Da aber die Gleichungen 274) Glieder mit den ersten Potenzen der  $p'$  und solche die von den  $p'$  frei sind, enthalten, so wird nach dieser Elimination  $T$  eine Funktion zweiten Grades der übrigen  $p'$  (der  $p'_h$ ) sein, welche nicht mehr homogen ist, sondern auch Glieder, die linear bezüglich der  $p'_h$  sind und ein von diesen ganz freies Glied enthält. Dann enthält also auch die Größe  $\mathfrak{P}_h$ , welche durch Elimination der  $p'_b$  aus  $H$  mittels der Gleichungen 274) entsteht, Glieder, die bezüglich der  $p'_h$  linear sind.

Ein Beispiel hierfür wäre ein System, welches einen um eine Hauptträgheitsachse reibungslos und widerstands-

los rotierenden Körper enthält, wie das Pendel, das wir in § 22 behandelten. Der Winkel, dessen Differentialquotient nach der Zeit die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Körpers bestimmt, wäre das betreffende  $p_b$  und es müßte angenommen werden, daß die Kräfte immer nur auf die beiden Spitzen der Achsen wirken, so daß niemals ein Drehmoment existiert, welches die Drehung beschleunigt oder verzögert. Der gleichen Bedingung unterworfenen rotierende Körper denkt sich Maxwell zur Erklärung des Magnetismus innerhalb der Volumenelemente des Äthers vorhanden und erklärt dadurch, daß die elektromagnetische Energie des Äthers Glieder enthält, die bezüglich der Stromstärken linear sind, wogegen die rein elektrodynamische Energie eine homogene quadratische Funktion der Stromstärken ist. Er nimmt nämlich an, daß die Stromstärken die Änderungsgeschwindigkeiten zyklischer Koordinaten sind.

Da § dadurch aus II entstanden ist, daß man darin die  $p'_b$  vermöge der Gleichungen (274) als Funktionen der  $p_h$  und  $p'_h$  ausgedrückt hat, so ist

$$\frac{\partial \S}{\partial p_h} = \frac{\partial II}{\partial p_h} + \sum_{b=1}^{b=\sigma} \frac{\partial II}{\partial p'_b} \frac{\partial p'_b}{\partial p_h}$$

$$\frac{\partial \S}{\partial p'_h} = \frac{\partial II}{\partial p'_h} + \sum_{b=1}^{b=\sigma} \frac{\partial II}{\partial p'_b} \frac{\partial p'_b}{\partial p'_h}$$

oder wegen der Gleichungen (274)

$$\frac{\partial II}{\partial p_h} = \frac{\partial \S}{\partial p_h} - \sum_{b=1}^{b=\sigma} q_b \frac{\partial p'_b}{\partial p_h}, \quad \frac{\partial II}{\partial p'_h} = \frac{\partial \S}{\partial p'_h} - \sum_{b=1}^{b=\sigma} q_b \frac{\partial p'_b}{\partial p'_h}.$$

Setzt man daher

$$275) \quad H' = \S - \sum_{b=1}^{b=\sigma} q_b p'_b,$$

so wird

$$\frac{\partial H'}{\partial p_h} = \frac{\partial II}{\partial p_h}, \quad \frac{\partial H'}{\partial p'_h} = \frac{\partial II}{\partial p'_h}.$$

Hier sind in  $H'$  die  $p'_b$  durch die Gleichungen (274) eliminiert zu denken, bei Bildung von  $\frac{\partial H}{\partial p_h}$  und  $\frac{\partial H}{\partial p'_h}$  aber als

konstant zu betrachten. Die allgemeine Bewegungsgleichung 272) nimmt also, wenn man die  $p'_b$  mittels der Gleichungen 274) durch  $p_h$  und  $p'_h$  ausgedrückt denkt, für jedes  $p_h$  dieselbe Form

$$276) \quad \mathfrak{P}_h = \frac{d}{dt} \frac{\partial H'}{\partial p'_h} - \frac{\partial H'}{\partial p_h}$$

an. Nur ist für  $H$  nun die Größe  $H'$  zu setzen, in der die  $p'_b$  durch die Gleichungen 274) als Funktionen von  $p_h$  und  $p'_h$  ausgedrückt zu denken sind, so daß  $H'$  im allgemeinen eine nicht homogene quadratische Funktion der  $p'_h$  ist.

Als Beispiel betrachten wir nochmals die schon in § 22 behandelte Aufgabe aus der Theorie der Rotation eines festen Körpers um einen fixen Punkt. Ein starrer Körper sei um einen festen Punkt drehbar. Sein Trägheitsellipsoid bezüglich dieses Punktes sei ein Rotationsellipsoid.

Wir wählen dieselben Bezeichnungen wie dort und es falle wieder die  $O\xi$ -Achse mit der Rotationsachse des Trägheitsellipsoides zusammen.

Dann erfüllt die Variable  $B$  die Bedingungen, die wir den jetzt mit  $p_b$  bezeichneten Koordinaten beilegen. Ist also die nach  $B$  wirkende generalisierte Kraft  $\mathfrak{B}$  zu allen Zeiten gleich Null, so ist nach 274)

$$\frac{\partial H}{\partial p'_b} = \frac{\partial H}{\partial B} = \frac{\partial T}{\partial B} = \text{konst.}$$

Bezeichnen wir den Wert dieser Konstanten mit  $-vJ$ , so folgt also aus der dritten der Gleichungen 121)

$$cA' - B' = v$$

übereinstimmend mit 124). Eliminiert man mittels dieser Gleichung  $B'$  aus dem Ausdrucke 123) für  $T$ , so folgt

$$277) \quad H = T = \frac{Q}{2} (\gamma^2 A'^2 + C'^2) + \frac{J}{2} v^2.$$

$F$  ist in unseren gegenwärtigen Rechnungen die Kraftfunktion der inneren Kräfte des Systems, also, da dieses ein einziger fester Körper ist, gleich Null. Die Schwere oder allgemeiner die Kräfte  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{C}$  werden als äußere Kräfte

angesehen und sind in den anderen Teil der Kraftfunktion  $\sum_{h=1}^{h=s} \mathfrak{P}_h p_h$  (Gleichung 220) eingerechnet.  $II$  ist nämlich hier immer gleich  $T - F$ , nicht wie früher in diesem Buch gleich  $T - V$ .

Der Ausdruck 277) ist die in Gleichung 275) mit § bezeichnete Größe. Aus dieser Gleichung folgt

$$278) \quad H' = \mathfrak{H} + v J B' = \frac{G}{2} (\gamma^2 A'^2 + C'^2) + v J_0 A',$$

wobei die eine Konstante  $-Jv^2/2$  als überflüssig weggelassen wurde. Aus dieser Größe  $H'$  müssen die nach  $A$  und  $C$  wirkenden generalisierten Kräfte  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{C}$  durch Gleichungen ableitbar sein, welche vollkommen die Form der Lagrangeschen haben. Es muß also

$$279) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H'}{\partial A'} \right) - \frac{\partial H'}{\partial A} \\ \mathfrak{C} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H'}{\partial C'} \right) - \frac{\partial H'}{\partial C} \end{array} \right.$$

sein. Durch Substitution des Wertes 278) für  $H'$  liefern diese Gleichungen tatsächlich in Übereinstimmung mit 125)

$$280) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} = \frac{d}{dt} (G \gamma^2 A' + v J_0) \\ \mathfrak{C} = G (C'' - c \gamma A'^2) + J v \gamma A'. \end{array} \right.$$

Die Gleichungen 279) haben vollkommen die Form der Lagrangeschen Gleichungen, aber  $H'$  enthält jetzt auch Glieder, die bezüglich der Geschwindigkeiten linear sind. Die Bewegungen können nicht in genau umgekehrter Weise vor sich gehen. Ein Pendel, mit dem ein rotierender Kreisels verbunden ist, hat, wie wir schon in § 22 sahen, für Schwingungen, bei denen sein Schwerpunkt sich im Kreise bewegt, bei der einen und anderen Umlaufszeit eine andere Schwingungsdauer, solange sich der Kreisels im selben Sinne dreht. Ganz analog enthält das Potential elektrischer Ströme bei Gegenwart permanenter Magnete, oder das von dem die elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes abhängt, Glieder, die bezüg-

lich der Stromstärken oder Geschwindigkeiten linear sind. Diese frappante Analogie ist natürlich kein Beweis, daß bei den letztgenannten physikalischen Erscheinungen wirklich verborgene Rotationsbewegungen eine Rolle spielen; aber sie würde durch diese Hypothese am ungezwungensten erklärt und weist jedenfalls darauf hin, daß das vergleichende Studium beider Arten von Erscheinungen weitere Aufschlüsse verspricht. Der in dem eben behandelten Beispiele betrachtete feste Körper ist übrigens ein reines Monozykel, wenn die Kräfte  $\mathcal{N}$  und  $\mathcal{C}$  stets gerade solche Werte haben, daß  $A$  und  $C$  sich sehr langsam im Vergleich zu  $B$  ändern, sonst ein gemischtes.

Einen Fall, wo  $H$  eine noch kompliziertere Funktion der Geschwindigkeiten sein kann, findet Helmholtz in folgender Weise. Es soll der Ausdruck für die lebendige Kraft aus zwei Summanden bestehen, von denen der eine nur gewisse Geschwindigkeiten  $p'_c$ , der andere nur die übrigen Geschwindigkeiten  $p'_d$  enthalten soll, so daß also

$$\partial^2 T / \partial p'_c \partial p'_d = 0$$

ist. Da  $F$  die Geschwindigkeiten gar nicht enthält, so folgt auch

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p'_c \partial p'_d} = 0.$$

Außerdem soll die äußere Kraft, die nach jeder der Koordinaten  $p_d$  wirkt, zu allen Zeiten gleich Null, also  $\mathfrak{P}_d = 0$  sein. Hier und in allem folgenden ist von keinen zyklischen Bewegungen mehr die Rede.

Es sind nun jedenfalls Bewegungen des Systems möglich, für welche alle  $p'_d$  verschwinden, daher alle  $p_d$  zu allen Zeiten konstant bleiben. Da  $H$  kein bezüglich irgend eines  $p'_d$  lineares Glied enthält, so ist dann auch für jeden Index  $d$

$$281) \quad \frac{\partial H}{\partial p'_d} = 0$$

und aus Gleichung 272) folgt für jeden Index  $d$

$$282) \quad \frac{\partial H}{\partial p_d} = 0.$$



Aus diesen Gleichungen können, von singulären Fällen abgesehen, die Koordinaten  $p_a$  als Funktionen von  $p_c$  und  $p'_c$  gefunden werden. Substituiert man die so gewonnenen Werte der  $p_a$  in  $H$ , so erhält man eine Funktion der  $p_c$  und  $p'_c$ , welche mit  $\mathfrak{H}$  bezeichnet werden soll.  $\mathfrak{H}$  braucht dann keine quadratische Funktion der  $p'_c$  zu sein, sondern kann diese Größen in ganz beliebiger Weise enthalten, jedoch wird es eine gerade Funktion der  $p'_c$  sein. Dann ist

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_c} = \frac{\partial H}{\partial p_c} + \sum_a \frac{\partial H}{\partial p_a} \cdot \frac{\partial p_a}{\partial p_c}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p'_c} = \frac{\partial H}{\partial p'_c} + \sum_a \frac{\partial H}{\partial p'_a} \cdot \frac{\partial p_a}{\partial p'_c},$$

daher wegen 281) und 282)

$$283) \quad \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_c} = \frac{\partial H}{\partial p_c}, \quad \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p'_c} = \frac{\partial H}{\partial p'_c}$$

und die Langrangschen Gleichungen für die Koordinaten  $p_a$  erfahren keine Veränderung in der Form, wenn man darin  $\mathfrak{H}$  für  $H$  einsetzt. Wenn aus dem Ausdrucke für  $H$  vermöge gewisser Bedingungsgleichungen gewisse Geschwindigkeiten eliminiert sind, so nennt Helmholtz das betreffende Problem ein unvollständiges, da es sich auf Berechnung der an diese Bedingungsgleichungen gebundenen Bewegungen beschränkt.

Wenn man zu physikalischen Vorgängen mechanische Analogien sucht, so kann man von vornherein nicht wissen, welche Variablen man mit Koordinaten, welche mit Geschwindigkeiten in Parallele stehen soll. So kann man z. B. in der Elektrodynamik die dielektrischen Momente mit Koordinaten, die magnetischen mit Geschwindigkeiten und umgekehrt in Parallele stellen. Nun ist in der Physik in der Regel die Energie als Funktion der Variablen experimentell gegeben. Ein vollständiges mechanisches Problem kann man daher als Analogie eines physikalischen Vorgangs nur dann benutzen, wenn der experimentell gegebene Ausdruck für die Energie von gewissen Variablen eine homogene quadratische Funktion ist, welche dann mit Geschwindigkeiten

in Parallele gestellt werden müssen. Wählt man dagegen ein unvollständiges mechanisches Problem als Analogie, so kann es vollkommen zweifelhaft werden, welche physikalische Variabeln man mit Geschwindigkeiten und welche mit Koordinaten in Parallele setzen soll, da beide in beliebiger Form im Ausdrucke für die Energie enthalten sein können.

#### § 54. Helmholtz' Reziprozitätssätze.

Diese Reziprozitätssätze beziehen sich nicht wie die Hertz'schen auf Zykeln, sondern auf ganz beliebige mechanische Systeme. Jedesmal, wenn eine Gleichung von der Form 272) gilt, folgt daraus

$$284) \quad \mathfrak{P}_h = -\frac{\partial H}{\partial p_h} + \sum_k \frac{\partial^2 H}{\partial p'_h \partial p_k} p'_k + \sum_k \frac{\partial^2 H}{\partial p'_h \partial p'_k} p''_k.$$

Sind nach der im vorigen Paragraphen beschriebenen Methode gewisse Koordinaten eliminiert, so bleibt diese Gleichung unverändert gültig, wenn man unter  $H$  diejenige Funktion versteht, für welche oben die Bewegungsgleichungen die Lagrangesche Form annehmen, also die Größe  $H'$ , wenn die Gleichungen 276) gelten, die Größe  $\mathfrak{H}$ , wenn die Gleichungen 283) gelten. Wir wollen in folgendem für alle diese Größen denselben Buchstaben  $H$  gebrauchen, da die Gleichung 284) und diejenigen, welche wir nun daraus entwickeln wollen, für alle diese Fälle gleichmäßig gelten.

1. Nach Gleichung 284) ist die äußere Kraft  $\mathfrak{P}_h$ , welche zu den durch die Kraftfunktion  $P$  bestimmten Kräften hinzukommen muß, um die gegebene zeitliche Veränderung der Koordinaten hervorzurufen, eine lineare Funktion der Beschleunigungen  $p''_k$  und man sieht sofort, daß

$$285) \quad \frac{\partial \mathfrak{P}_h}{\partial p''_k} = \frac{\partial \mathfrak{P}_k}{\partial p''_h} = \frac{\partial^2 H}{\partial p'_h \partial p'_k}$$

ist. Wenn also bei Konstanz der Koordinaten, Geschwindigkeiten und übrigen Beschleunigungen ein Zuwachs einer Beschleunigung  $p''_k$  einen Zuwachs einer mit anderem Index versehenen äußeren Kraft  $\mathfrak{P}_h$  bewirkt, so bewirkt der gleiche

Zuwachs der Beschleunigung  $p''_k$ , die derselben Koordinate wie die Kraft  $\mathfrak{P}_k$  entspricht, einen gleichen Zuwachs der der anderen Koordinate entsprechenden Kraft  $\mathfrak{P}_k$ .

*Beispiel.* Aus der zweiten der Gleichungen 121) ist ersichtlich, daß die Beschleunigung  $B''$  von Einfluß auf die Kraft  $\mathfrak{A}$  ist. Daher muß auch  $A''$  von Einfluß auf  $\mathfrak{B}$  und  $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial B''} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial A''}$  sein. Beide Werte ergeben sich aus 121) in der Tat gleich  $-cJ$ .

2. Aus Gleichung 284) folgt weiter:

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_k}{\partial p'_k} = - \frac{\partial^2 H}{\partial p'_h \partial p'_k} + \frac{\partial^2 H}{\partial p'_h \partial p'_k} + \sum_i \frac{\partial^2 H}{\partial p'_h \partial p'_k \partial p'_i} p'_i + \sum_i \frac{\partial^2 H}{\partial p'_h \partial p'_k \partial p'_i} p''_i$$

oder wenn man die beiden letzten Summen so zusammenzieht, wie man es auch tun müßte, um von Gleichung 284) zu Gleichung 272) zurückzugelangen:

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_k}{\partial p'_k} = - \frac{\partial^2 H}{\partial p'_h \partial p'_k} + \frac{\partial^2 H}{\partial p'_h \partial p'_k} + d \left( \frac{\partial^2 H}{\partial p'_h \partial p'_k} \right).$$

Bildet man ebenso  $\partial \mathfrak{P}_k / \partial p'_h$ , so sieht man, daß in allen Fällen, wo  $\partial^2 H / \partial p'_h \partial p'_k$  (was nach 285) gleich  $\partial \mathfrak{P}_h / \partial p'_k$  und auch gleich  $\partial \mathfrak{P}_k / \partial p'_h$  ist), konstant speziell, wo es gleich Null ist, die Gleichung besteht

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_k}{\partial p'_k} = - \frac{\partial \mathfrak{P}_k}{\partial p'_k}.$$

In allen diesen Fällen gilt also folgendes: Wenn eine größere Geschwindigkeit  $p'_k$  bei Gleichheit aller übrigen Geschwindigkeiten und der Werte aller Koordinaten und Beschleunigungen ein größeres  $\mathfrak{P}_k$  bedingt, so bedingt eine größere Geschwindigkeit  $p'_k$  natürlich wieder bei Gleichheit der übrigen Geschwindigkeiten und der Koordinaten und Beschleunigungen ein im selben Maße kleineres  $\mathfrak{P}_k$ .

*Beispiel.* Wenn ein fester, um einen festen Punkt drehbarer Körper sich so bewegt, daß  $C$ ,  $A'$  und  $B'$  konstant sind und  $B'$  groß gegenüber  $A'$  ist, so macht er eine einfache Präzessionsbewegung. Die nach der Koordinate  $C$  wirkende generalisierte Kraft  $\mathfrak{C}$  (das Moment der äußeren

Kräfte um die Achse  $OR$  muß dann von Null verschieden sein und zwar muß es für positive  $A'$  und  $B'$  negativ sein und sein Absolutwert mit wachsendem  $A'$  wachsen, sodaß  $\partial \mathfrak{U} / \partial A'$  negativ ist. Wenn also  $\mathfrak{U}$  durch die Schwere erzeugt wird und  $OZ$  der Richtung derselben entgegengesetzt ist, so muß der Schwerpunkt auf der negativen  $O\xi$ -Achse liegen. Ferner ist nach 121)

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial O'} = \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial A''} = 0.$$

Daher muß  $\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial O'}$  positiv und dem Zahlenwerte nach gleich  $\partial \mathfrak{U} / \partial A'$  sein. Damit also ohne anderweitige Änderung der Verhältnisse  $C'$  von Null zu einem kleinen positiven Werte ansteige und diesen dann kurze Zeit konstant behalte, d. h. damit die positive  $O\xi$ -Achse sinke, der Schwerpunkt also der Richtung der Schwere entgegen steige, ist ein Moment  $\mathfrak{U}$  erforderlich, das in der Richtung der wachsenden  $A$  wirkt, also die Präzession zu beschleunigen sucht, was mit der Erfahrung stimmt. Natürlich ist dieser Beweis hier nur anwendbar, solange sich durch das Wachsen von  $C$  die übrigen Verhältnisse noch nicht geändert haben. Aus den Gleichungen 121) ergibt sich natürlich unmittelbar

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial C'} = - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial A'}.$$

Ebenso ist

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial O'} = - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial B'},$$

aber nicht

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial B'} = - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial A'}$$

wegen

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial B''} = - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial A''} = - cJ.$$

Bezüglich des Nachweises, daß sich dieser Satz auch auf allen jenen Gebieten der Wärme- und Elektrizitätslehre und Chemie bewährt, wo Gleichungen gelten, die mit den für verborgene Bewegungen geltenden mechanischen Gleichungen analog sind, muß hier auf die zitierte Originalabhandlung Helmholtz' verwiesen werden. Es sei hier

nur noch darauf hingewiesen, daß sich die Beziehung zwischen dem Prinzip der kleinsten Wirkung und dem zweiten Hauptsatze auch insofern bewährt, als die meisten Relationen die man so erhält, sonst mittelst des zweiten Hauptsatzes bewiesen werden. (Beziehung zwischen Kompressionskoeffizient oder Elastizitätsmodul und Temperaturänderung bei Kompression oder Dehnung, Volumänderung beim Schmelzen und Schmelzpunktsänderung durch Druck, thermoelektromotorische Kraft und Peltierphänomen, Wärmeentwicklung in galvanischen Elementen und Abhängigkeit ihrer elektromotorischen Kraft von der Temperatur etc. etc. Ebenso muß ich bezüglich einer Reihe anderer Lehrsätze und Reziprozitäten sowie bezüglich der weiteren Anwendungen in der Wärmelehre und aller Anwendungen in der Elektrodynamik auf die Originalabhandlung verweisen, da sich dieselben zu weit vom Boden der reinen Mechanik entfernen.

## V. Die Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichungen.

### ✓ § 55. Das Prinzip der variierenden Wirkung.

Wir kehren nun wieder zu dem ganz allgemeinen im § 30 betrachteten Falle zurück, haben aber die Absicht, die Art und Weise der Variation einer Reihe von neuen beschränkenden Bedingungen zu unterwerfen. Es soll ein holonomes System von  $n$  materiellen Punkten durch beliebige generalisierte Koordinaten  $p_1, p_2, \dots, p_s$  bestimmt sein. Die lebendige Kraft  $T$  soll eine gegebene, die Zeit nicht enthaltende Funktion der Koordinaten und generalisierten Geschwindigkeiten (resp. der Koordinaten und Momente) sein; es soll eine Kraftfunktion  $V$  existieren, welche ebenfalls eine gegebene Funktion der Koordinaten sein soll und welche letztere die Zeit auch explizit enthalten kann. Die Zahl  $s$  der generalisierten Koordinaten

soll jedoch genau gleich der der Freiheitsgrade des Systems sein, so daß zwischen den generalisierten Koordinaten keine Bedingungsgleichungen mehr bestehen. Es ist dies erforderlich, damit später die  $p_h^0$  und  $p_h^1$  unabhängig voneinander variiert werden können.

Die allgemeinen Bewegungsgleichungen 50) und 51) lauten dann wie folgt:

$$286) \quad \frac{d q_h}{d t} = \frac{\partial_{p'}(T - V)}{\partial p_h},$$

wobei

$$q_h = \frac{\partial T}{\partial p'_h} = \frac{\partial (T - V)}{\partial p'_h}.$$

Durch diese Gleichungen und die Werte  $p_h^0$  und  $q_h^0$ , welche sämtliche Koordinaten und Momente zu einer bestimmten Zeit  $t_0$ , die wir jetzt immer den Zeitanfang nennen wollen, haben, ist eine bestimmte Bewegung eindeutig bestimmt, welche wir die unvariierte Bewegung nennen. Wir können für dieselbe die einer beliebigen Zeit  $t$  zugehörigen Werte der Koordinaten und Momente aus den Bewegungsgleichungen als Funktionen von  $t$ ,  $p_h^0$  und  $q_h^0$  berechnen. Wir können auch die Werte, welche zur Zeit  $t$  die Größen  $T$  und  $V$  und somit auch den Wert, welchen das Integral

$$287) \quad W = \int_{t_0}^t (T - V) dt$$

hat, als Funktion der  $2s$  Anfangswerte  $p_h^0$  und  $q_h^0$  und der Zeit  $t$  berechnen. Es ist jetzt bequemer die obere Grenze nicht mit dem Index 1 zu versehen, sondern sie ebenso zu bezeichnen, wie die Variable  $t$  unter den Integralzeichen, nach welcher integriert wird, da die letztere bald in unseren Formeln nicht mehr vorkommen wird und es dann lästig wäre, den Index 1 immer mitzuschleppen.

Da wir die Bewegungsgleichungen als gegeben annehmen, so erhalten wir durch Integration derselben  $s$  Gleichungen, welche uns die  $s$  Werte der Koordinaten  $p_h$  als Funktionen der  $2s + 1$  Werte von  $p_h^0$ ,  $q_h^0$  und  $t$  ausdrücken. Aus diesen  $s$  Gleichungen zwischen den  $3s + 1$  Größen  $p_h^0$ ,  $p_h$ ,  $q_h^0$  und  $t$  können wir die  $s$  Größen  $q_h^0$  als Funktionen der  $2s + 1$  Werte von  $p_h^0$ ,  $p_h$  und  $t$  ausdrücken. Substituieren wir die

so erhaltenen Ausdrücke von  $q_h^0$  in die Größe  $W$ , welche wir ja schon oben als Funktion der  $2s + 1$  Größen  $p_h^0$ ,  $q_h^0$  und  $t$  ausgedrückt haben, so erhalten wir für  $W$  einen Ausdruck, welcher nur die  $2s + 1$  Variablen  $p_h^0$ ,  $p_h$  und  $t$  enthält, so daß also  $W$  als Funktion dieser Variablen dargestellt erscheint, was wir die Hamiltonsche Darstellungsweise nennen wollen.

Wir wollen nun wie bisher immer nebst dieser, der unvariirten Bewegung, eine von ihr unendlich wenig abweichende variierte Bewegung betrachten.

Über das Verhältnis der beiden Bewegungen machen wir jetzt die folgenden speziellen Voraussetzungen:

Der Zeitanfang  $t_0$  soll für die variierte Bewegung, genau derselbe sein, d. h. die Funktion  $V$  soll, wenn sie die Zeit explizit enthält, zu Anfang der variierten Bewegung dieselbe Funktion der Koordinaten sein, wie zu Anfang der unvariirten. Sie soll auch zu jeder Zeit  $t$  der variierten Bewegung dieselbe Funktion der Koordinaten sein, wie zu derjenigen Zeit  $t$  der unvariirten Bewegung, welche vom Zeitanfang der unvariirten Bewegung ebensoweit absteht, wie die erstere Zeit  $t$  vom Zeitanfang der variierten Bewegung. Wir wollen die solchen Zeiten entsprechenden Zustände wieder korrespondierende nennen und sagen, der eine sei der Zustand der unvariirten, der andere der der variierten Bewegung, welcher zur Zeit  $t$  stattfindet.

Da wir vorläufig  $t_0$  als absolut invariabel betrachten, so brauchten wir nirgends hervorzuheben, daß die betreffenden Größen auch Funktionen von  $t_0$  sind.

Es sei hier noch die folgende Bemerkung beigefügt, die übrigens auch auf die in den vorigen Abschnitten behandelten Variationsprobleme Anwendung findet. Würde  $V$  die Zeit nicht explizit enthalten, so wäre die absolute Lage des Zeitpunktes  $t_0$  in der Zeitreihe natürlich vollkommen gleichgültig. Diese absolute Lage  $t_0'$  in der Zeitreihe könnte für die variierte eine andere als die ( $t_0$ ) für die unvariirte sein; es käme bloß darauf an, daß die Zeitabstände korrespondierender Zustände immer gleich wären, so daß, wenn irgend ein Zustand  $A$  der unvariirten Bewegung zur

Zeit  $t$ , und der korrespondierende Zustand  $B$  der variirten zur Zeit  $t'$  stattfinde,  $t' - t = t'_0 - t_0$  wäre. Es würde dann  $t'$  die der Zeit  $t$  korrespondierende Zeit heißen. Doch ist die Vorstellung einfacher und nicht wesentlich verschieden, daß  $t'$  und  $t$  identische Zeiten sind; ebenso  $t'_0$  und  $t_0$ . Wir wollen uns daher immer dasselbe materielle System zur selben Zeit doppelt in zwei nahe gleichen Zuständen vorhanden denken, ohne daß das eine Exemplar des Systems das andere irgendwie beeinflußt.

Es soll nun gegenwärtig speziell die Variation so ausgeführt werden, daß nicht nur die Form der Funktionen  $T$  und  $V$  samt allen darin vorkommenden konstanten Parametern vollkommen unverändert bleiben, sondern daß auch behufs Erzeugung der Variation der Bewegung nicht die mindesten Zusatzkräfte wirken, so daß die zu irgend einer Zeit der variirten Bewegung wirkenden Kräfte wieder genau gleich den partiellen Ableitungen derselben Funktion  $V$  nach den Koordinaten sein sollen und nur deshalb andere Werte haben können, weil die in diese partiellen Ableitungen zu substituierenden Werte der Koordinaten bei der variirten Bewegung etwas andere als im korrespondierenden Zustande der unveränderten Bewegung sind.

Die Variation des Integrales  $W$  soll also in diesem Paragraphen und im folgenden bloß durch drei Umstände bewirkt sein:

1. Sollen die Anfangswerte der Koordinaten für die variirte Bewegung etwas andere als für die unveränderte sein. Für die erstere soll der Anfangswert der  $h$ -ten Koordinate  $p_h^0 + \delta p_h^0$ , für die letztere  $p_h^0$  sein.

2. Soll die obere Grenze des über die variirte Bewegung erstreckten Integrales  $W$  nicht die der oberen Grenze des über die unveränderte Bewegung erstreckten Integrales entsprechende Zeit  $t$  sein, sondern sie soll um  $\delta t$  weiter vom Zeitanfange abstehen als bei der unveränderten Bewegung.

3. Sollen die Anfangswerte der Momente für die variirte Bewegung ebenfalls etwas andere sein, als für die unveränderte. Der Anfangswert des  $h$ -ten Momentes soll für



die variierte Bewegung  $q_h^0 + \delta q_h^0$ , für die unvariierte Bewegung  $q_h^0$  sein. Doch wollen wir nicht die Größen  $\delta q_h^0$  in unsere Formeln einführen, sondern die Variationen  $\delta p_h$  der Endwerte der generalisierten Koordinaten. Unter  $\delta p_h$  verstehen wir die Größe, welche man zum Werte, den die  $h$ -te Koordinate bei der unvariierten, von den Anfangswerten  $p_h^0$  und  $q_h^0$  ausgehenden Bewegung zur Zeit  $t$  hat, hinzu addieren muß, um den Wert zu erhalten, den dieselbe Koordinate bei der variierten von den Anfangswerten  $p_h^0 + \delta p_h^0$  und  $q_h^0 + \delta q_h^0$  ausgehenden Bewegung zur Zeit  $t + \delta t$  hat. Dagegen soll, wie schon bemerkt, die Beschaffenheit des materiellen Systems vollkommen unverändert bleiben, die Kraftfunktion soll dieselbe Funktion der Koordinaten und eventuell der Zeit bleiben und es sollen zu den durch sie bedingten Kräften keine neuen, noch auch irgendwelche andere äußere Einwirkungen hinzutreten.

Wir bezeichnen nun mit  $\delta W$  den Zuwachs, den  $W$ , also das Integral (287) dadurch erfährt, daß

1. die obere Grenze der Integration  $t + \delta t$  statt  $t$  ist;
2. die Anfangswerte der Koordinaten  $p_h^0 + \delta p_h^0$  statt  $p_h^0$  sind, und

3. die Anfangswerte der Momente so gewählt sind, daß bei den neuen Anfangswerten der Koordinaten irgend eine, z. B. die  $h$ -te Koordinate zur Zeit  $t + \delta t$  den Wert  $p_h + \delta p_h$  hat, während sie bei der unvariierten, von den alten Anfangswerten ausgehenden Bewegung zur Zeit  $t$  den Wert  $p_h$  hatte.

Da die Gleichung (207) für jede beliebige Variation gilt, so muß sie auch für diesen speziellen Fall gelten. Welche Werte also auch immer  $\delta p_h^0$ ,  $\delta p_h$  und  $\delta t$  haben mögen, man hat jedesmal

$$(288) \quad \delta W = -(T + V) \delta t + \sum_1^g (q_h \delta p_h - q_h^0 \delta p_h^0).$$

#### § 56. Die beiden Hamiltonschen partiellen Differentialgleichungen.

Wir wollen nun unter den partiellen Differentialquotienten der Größe  $W$ , wenn wir nicht ausdrücklich sagen,

daß wir es anders meinen, immer diejenigen verstehen, welche man erhält, wenn man  $W$  in der Weise ausdrückt, welche wir die Hamiltonsche genannt haben, also als Funktion der  $p_h^0$ ,  $p_h$  und der Zeit  $t$ , wobei wir die Abhängigkeit von  $t_0$ , da dieses immer als konstant betrachtet wird, nicht weiter berücksichtigen. Es ist also  $\partial W / \partial t$  der durch den Zuwachs  $\delta t$  der Zeit dividierte Zuwachs  $\delta_t W$  des  $W$ , welcher entsteht, wenn die obere Grenze des Integrales 287) um  $\delta t$  wächst, aber die Koordinatenwerte für die untere und obere Grenze dieselben bleiben, also  $\delta p_h = \delta p_h^0 = 0$  ist. Dann erhält man aber aus der Gleichung 288)

$$289) \quad \delta_t W = -(T + V) \delta t,$$

daher ist:

$$290) \quad \frac{\partial W}{\partial t} = -T - V = -E,$$

was man als die erste Hamiltonsche partielle Differentialgleichung bezeichnet.<sup>1)</sup>

Ebenso ist  $\partial W / \partial p_h$  der durch den Zuwachs  $\delta p_h$  des für die obere Grenze des Integrales 287) geltenden Wertes der  $h$ -ten Koordinate dividierte Zuwachs  $\delta_h W$  des  $W$ , welcher entsteht, wenn die beiden Grenzen des Integrales 287) sowie die Anfangswerte aller Koordinaten unverändert bleiben, die Anfangswerte der Momente aber sich so ändern, daß auch die für die obere Grenze des Integrales 287) geltenden Werte der Koordinaten alle bis auf  $p_h$  konstant bleiben. Dadurch erhält man aber aus Formel 288)

$$\delta_h W = q_h \delta p_h.$$

Es ist also

$$291) \quad \frac{\partial W}{\partial p_h} = q_h.$$

Endlich findet man in gleicher Weise, indem man in Formel 288) alle Variationen gleich Null setzt, bis auf  $\delta p_h^0$

$$292) \quad \frac{\partial W}{\partial p_h^0} = -q_h^0.$$

---

<sup>1)</sup> Bei konstanten  $p_h^0$  und  $q_h^0$  wäre natürlich  $\partial W / \partial t = T - V$ .

Es mag hier nur beiläufig bemerkt werden, daß wir gerade so, wie wir bisher  $t_0$  unverändert ließen und nur die obere Grenze  $t$  des Integrales 287) änderten, auch umgekehrt die obere Grenze konstant halten und  $t_0$  verändern können, dann haben wir in  $W$ , das ja Funktion von  $t_0$  und  $t$  ist, letzteres konstant zu lassen, so daß also bei konstantem  $t$  die Größe  $W$  als Funktion von  $t_0$ ,  $p_h$  und  $p_h^0$  auszudrücken ist. Dann folgt aus 207)

$$293) \quad \frac{\partial W}{\partial t_0} = E_0,$$

was man die zweite Hamiltonsche partielle Differentialgleichung nennt. Die beiden Gleichungen  $\partial W / \partial p_h = q_h$  und  $\partial W / \partial p_h^0 = -q_h^0$  bleiben ungeändert, da daselbst  $t_0$  und  $t$  konstant zu betrachten sind. In der Tat sind die  $2s + 2$  Größen  $t_0$ ,  $t$  und die  $p_h^0$  und  $p_h$  alle independent voneinander veränderlich.  $t_0$  und  $t$  sind für jede Art der Bewegung ganz willkürlich. Sind dafür bestimmte Werte gewählt, so bestimmen die  $p_h^0$  und  $p_h$  die Art der Bewegung, also die  $2s$  Integrationskonstanten der Bewegungsgleichungen. Wenn nämlich die  $p_h$  als Funktionen von  $t$  und  $2s$  Integrationskonstanten gegeben sind und man in die betreffenden Gleichungen einmal  $t = t$ , dann  $t = t_0$  setzt, so erhält man  $2s$  Gleichungen, aus denen jene  $2s$  Integrationskonstanten als Funktionen von  $t$ ,  $t_0$  und den  $p_h$  und  $p_h^0$  bestimmt werden können.

Wir wollen uns übrigens hier um diese zweite Hamiltonsche partielle Differentialgleichung nicht weiter kümmern, sondern zunächst bloß, um die Art der Bildung der hier vorkommenden partiellen Differentialquotienten zu illustrieren, die Gesetze der Bewegung eines freien materiellen Punktes von der Masse  $m$  im Raume, auf den gar keine Kräfte wirken, also das Trägheitsgesetz als bekannt voraussetzen und daran die Richtigkeit der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung 290), sowie der Gleichung 291) und 292) verifizieren.

Es seien  $p_1, p_2, p_3$  die drei rechtwinkligen Koordinaten des Punktes,  $p'_1, p'_2, p'_3$  die konstanten Komponenten seiner Geschwindigkeit in den drei Koordinatenrichtungen. Dann

ist, weil die Bewegung des Punktes geradlinig und gleichförmig ist:

$$294) \begin{cases} p_1 = p'_1(t - t_0) + p_1^0, & p_2 = p'_2(t - t_0) + p_2^0, \\ p_3 = p'_3(t - t_0) + p_3^0, \end{cases}$$

ferner

$$295) \begin{cases} T = \frac{m}{2} (p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2) = \frac{m}{2(t-t_0)^2} [(p_1 - p_1^0)^2 + \\ + (p_2 - p_2^0)^2 + (p_3 - p_3^0)^2]. \end{cases}$$

$V$  ist konstant, daher:

$$296) W = \int_{t_0}^t \left( \frac{m \dot{\sigma}^2}{2} - V \right) dt = \frac{m(t-t_0)}{2} (p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2) - V(t-t_0).$$

Diese Größe muß erst als Funktion von  $t$ ,  $p$  und  $p_0$  ausgedrückt werden. Da:

$$297) p'_1 = \frac{p_1 - p_1^0}{t - t_0} \text{ etc.}$$

ist, so folgt:

$$298) W = \frac{m}{2(t-t_0)} [(p_1 - p_1^0)^2 + (p_2 - p_2^0)^2 + (p_3 - p_3^0)^2] - V(t-t_0).$$

Nun hat man nach den sieben als independent zu betrachtenden Variablen  $t$ ,  $p$  und  $p^0$  partiell zu differenzieren und erhält so

$$299) \frac{\partial W}{\partial t} = - \frac{m}{2(t-t_0)^2} [(p_1 - p_1^0)^2 + (p_2 - p_2^0)^2 + (p_3 - p_3^0)^2] - V.$$

Es ist also in der Tat die Gleichung 290) erfüllt. Ebenso ist gemäß der zweiten Hamiltonschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t_0} = T + V. \text{ Ferner wird}$$

$$300) \frac{\partial W}{\partial p_1} = \frac{m(p_1 - p_1^0)}{(t - t_0)} = m p'_1 = q_1$$

und ebenso sind die übrigen der Gleichungen 291) und 292) erfüllt.  $q_1$  ist das Bewegungsmoment  $m p'_1 = \partial T / \partial p'_1$ , in welchem letzteren partiellen Differentialquotienten aber die  $p$  und  $p'$  als independente Variablen zu gelten haben.  $q_1^0$  ist wegen der Konstanz der Geschwindigkeitskomponenten gleich  $q_1$ .

### § 57. Anwendung der ersten Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung.

Wir haben in diesem Beispiele die Integrale der Bewegungsgleichungen als bekannt vorausgesetzt. Wo die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung praktisch zur Anwendung kommt, liegt die Sache natürlich anders. Da ist bloß  $T$  als Funktion der  $p$  und  $p'$ , oder  $p$  und  $q$ ,  $V$  aber als Funktion der  $p$  und eventuell der Zeit  $t$  gegeben. Die Integrale der Bewegungsgleichungen sind unbekannt. Man hat also zunächst, wenn  $T$  als Funktion von  $p$  und  $p'$  gegeben ist, durch partielle Differentiation nach den  $p'$  die Größen  $q$  zu bilden, dann diese statt der  $p'$  in  $T$  einzuführen, so daß jetzt  $T$  als Funktion von  $p$  und  $q$  erscheint. Darin hat man statt  $q_h$  zu substituieren  $\partial W / \partial p_h$  und den so erhaltenen Wert von  $T$  in die erste Hamiltonsche partielle Differentialgleichung (290) zu substituieren. Die Form, welche diese dadurch annimmt, wollen wir symbolisch durch

$$(301) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + T\left(\frac{\partial W}{\partial p_h}\right) + V = \frac{\partial W}{\partial t} + E\left(\frac{\partial W}{\partial p_h}\right) = 0$$

bezeichnen.

Dieselbe enthält in bekannter Weise die  $s + 1$  in dieser Differentialgleichung als die independenten zu betrachtenden Variablen  $p$  und  $t$  und die partiellen Differentialquotienten der als Funktion dieser independenten zu suchenden Unbekannten  $W$  nach den independenten Variablen und zwar den partiellen Differentialquotienten  $\partial W / \partial t$  linear, von den übrigen partiellen Differentialquotienten  $\partial W / \partial p_h$  aber die Quadrate und Produkte je zweier.

Alle diese Operationen kann man vornehmen, ohne die Integrale der Bewegungsgleichungen zu kennen. Um nun letztere zu finden, ist es durchaus nicht nötig, die allgemeine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung aufzusuchen. Es genügt, wenn man sich in irgend einer Weise ein sogenanntes vollständiges Integral verschafft, d. h. eine Funktion der  $s + 1$  Variablen  $p_h$  und  $t$ , welche der partiellen

Differentialgleichung genügt und genau so viele willkürliche voneinander unabhängige Konstanten enthält als partielle Differentialquotienten erster Ordnung in der Differentialgleichung vorkommen. Es kommen deren in unserer Differentialgleichung  $s + 1$  vor. Da aber die Unbekannte  $W$  undifferenziert in der Gleichung nicht vorkommt, so kommt eine Konstante jedenfalls additiv zu  $W$  hinzu und spielt später, da wir immer nur die Differentialquotienten von  $W$  brauchen, gar keine Rolle. Es genügt also eine Lösung der Differentialgleichung zu finden, welche  $s$  voneinander unabhängige willkürliche Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  enthält, von denen keine additiv zu  $W$  hinzutritt.

Wenn wir die mechanische Aufgabe vollständig gelöst hätten, so könnten wir  $W$  als Funktion von  $t, p_h, p_h^0$  ausdrücken. Dieser Wert des  $W$  (er heiße  $W'$ ) wäre ein vollständiges Integral der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung 294), da er derselben genügt und die  $s$  willkürlichen voneinander unabhängigen Konstanten  $p_h^0$  enthält, von denen keine additiv zu  $W$  hinzukommt. Denn für  $t = t_0$  ist  $W = 0$ .

Wir setzen nun allerdings voraus, daß wir die mechanische Aufgabe noch nicht gelöst haben. Wir kennen daher auch dieses eine vollständige Integral der Gleichung 294) nicht. Aber wir nehmen an, daß wir irgendwie ein anderes vollständiges Integral gefunden hätten, also eine die partielle Differentialgleichung 294) erfüllende Funktion von  $t$ , den  $p_h$  und noch  $s$  willkürlichen voneinander unabhängigen Konstanten  $\alpha_h$ , von denen keine additiv zu dieser Funktion hinzukommt. Die Kenntnis dieses beliebigen anderen vollständigen Integrals genügt dann, um durch bloß partielle Differentiation  $s$  Gleichungen zu finden, aus denen die  $s$  unbekannten Variablen so als Funktionen der Zeit und  $2s$  unabhängiger Integrationskonstanten ausgedrückt werden können, daß sie die Bewegungsgleichungen 286) der mechanischen Aufgabe erfüllen, wodurch also die mechanische Aufgabe vollständig gelöst ist.

Wir wollen dieses andere noch um eine  $(s + 1)$ -te Konstante  $\alpha_0$  vermehrte vollständige Integral augenblicklich

mit  $W''$ , später aber wieder mit  $W$  ohne Index bezeichnen. Die durch das Integral 287) definierte Wirkung  $W'$  für unser mechanisches Problem ist, als Funktion von  $t$ ,  $p$  und  $p^0$  ausgedrückt, ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung 301).  $W'$  verwandelt sich, wenn man die  $p$  durch  $p^0$ ,  $q^0$  und  $t$  ausdrückt, in eine Funktion von  $p^0$ ,  $q^0$  und  $t$ . Nimmt man an, jedes andere vollständige Integral  $W''$  der partiellen Differentialgleichung 301) stelle dieselbe Wirkung dar, d. h. dieselbe Funktion der Zeit nur unter Einführung anderer Konstanten statt der Anfangswerte, so können die Integrationskonstanten des einen vollständigen Integrales nur Funktionen der Integrationskonstanten des anderen, also hier die  $p^0$  nur Funktionen der  $\alpha$  sein und es muß  $W''$  sich identisch in  $W'$  verwandeln, wenn man für die  $p^0$  darin diese Funktionen substituiert. Differenziert man das so erhaltene  $W''$  partiell nach irgend einem  $\alpha$ , z. B. nach  $\alpha_h$ , so folgt:

$$302) \quad \frac{\partial W''}{\partial \alpha_h} = \sum_1^s \frac{\partial W''}{\partial p_i^0} \frac{\partial p_i^0}{\partial \alpha_h}.$$

Nun können die  $\frac{\partial p^0}{\partial \alpha}$  wieder nur die Integrationskonstanten enthalten. Ferner sind nach Gleichung 292) die  $\frac{\partial W''}{\partial p^0}$  gleich den negativen  $q^0$ , also auch Integrationskonstanten. Es ist also die ganze rechte Seite der Gleichung 302) eine bloße Funktion der Integrationskonstanten; setzt man sie gleich  $\beta_h$ , so verwandelt sich die Gleichung 302) in

$$303) \quad \frac{\partial W''}{\partial \alpha_h} = \beta_h,$$

welche Relation  $s$  Gleichungen darstellt, aus denen die  $s$  Größen  $p_h$  als Funktionen der Zeit und der  $2s$  Integrationskonstanten  $\alpha$  und  $\beta$  gefunden werden können, womit die Integrale der Gleichungen 286), also des mechanischen Problems gefunden sind. Berechnet man die  $p'$  und setzt in den betreffenden Gleichungen und den Gleichungen 303)  $t = t_0$ , so kann man leicht die  $\alpha$  und  $\beta$  durch die  $p^0$  und  $q^0$  ausdrücken.

§ 58. Direkter Beweis der Richtigkeit der im vorigen  
Paragraphen gefundenen Resultate.

Wir wollen im folgenden, ohne uns auf eine Diskussion einzulassen, welcher Ergänzungen die Schlußweise am Ende des vorigen Paragraphen bedürfte, bloß auf die einfachste Art beweisen, daß die in der beschriebenen Weise mittels der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung für die  $p_h$  gefundenen Funktionen der Zeit wirklich die gesuchte Lösung der mechanischen Aufgabe sind, und zwar wollen wir diesen Beweis nach dem Vorgange Jacobis liefern, indem wir durch nachträgliche Differentiation zeigen, daß die Funktionen der Zeit, welche wir nach unserer Methode für die  $p$  erhalten und welche auch die erforderliche Anzahl willkürlicher Konstanten enthalten, wirklich die Bewegungsgleichungen 286) erfüllen.

Wir müssen da bloß die partielle Differentialgleichung 294) als gegeben und ein vollständiges Integral  $W$  derselben mit  $s$  voneinander unabhängigen Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ , von denen keine additiv zu  $W$  hinzutritt, als gefunden betrachten. Wenn wir dann

$$304) \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_h} = \beta_h, \quad h = 1, 2, \dots, s$$

setzen, so erhalten wir  $s$  Gleichungen, welche die Größen  $p_h$  als Funktionen von  $t$  und den Konstanten  $\alpha_h$  und  $\beta_h$  bestimmen.

Von diesen Funktionen haben wir nachzuweisen, daß sie, was immer für Werte die Konstanten  $\alpha_h$  und  $\beta_h$  haben mögen, immer den Bewegungsgleichungen 286) genügen. Unter  $q_h$  verstehen wir vorläufig nichts anderes als den partiellen Differentialquotienten des  $W$  nach  $p_h$ , wobei  $W$  als Funktion von  $t$ , der  $p_h$  und der  $\alpha_h$  anzusehen ist. Die Gleichungen 291) sind also jetzt nicht als durch Rechnung gefundene Relationen, sondern vielmehr als die Definitionsgleichungen für die  $q$  anzusehen.

Der Annahme gemäß genügt  $W$  für alle möglichen Werte der Konstanten  $\alpha_h$  der partiellen Differentialglei-



chung 301). Man kann daher diese Gleichung auch nach irgend einem  $\alpha$  partiell differenzieren. Dabei wird die darin vorkommende Größe  $q_h = \partial W / \partial p_h$  als Funktion von  $t$ , der  $p_h$  und der  $\alpha_h$  zu betrachten sein. Man erhält also durch partielle Differentiation der Gleichung 301) nach  $\alpha_h$

$$305) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial \alpha_h} + \sum_1^s \frac{\partial E}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_h} = 0.$$

Die Differentialquotienten der  $p$  nach der Zeit, die wieder durch einen oben angehängten Strich markiert werden sollen, folgen durch Differentiation der Gleichung 303) nach der Zeit, die ja die Abhängigkeit der  $p$  von der Zeit angibt, wodurch man die mit den Gleichungen 304) identischen Gleichungen

$$304) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial \alpha_h} + \sum_1^s \frac{\partial^2 W}{\partial p_i \partial \alpha_h} p'_i = \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial \alpha_h} + \sum_1^s \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_h} p'_i = 0.$$

erhält, denen wir wieder die Nummer 304) geben. Diese Relation 304) repräsentiert uns  $s$  lineare Gleichungen für die Größen  $p'_i$ , welche daraus als Funktionen von  $t$ ,  $p_h$  und  $\alpha_h$  gefunden werden können, oder auch als Funktionen von  $t$ ,  $\alpha_h$  und  $\beta_h$ , da die  $p_h$  durch die Gleichungen 303) als Funktionen von  $\alpha_h$  und  $\beta_h$  ausgedrückt werden können. Die Koeffizienten der  $p'_i$  und das von  $p'_i$  freie Glied in den Gleichungen 304) sind aber ganz dieselben, wie die Koeffizienten der Größen  $\partial E / \partial q_i$  und das nicht mit diesen Größen multiplizierte Glied in den Gleichungen 305). Wenn man daher die letzteren Gleichungen als  $s$  lineare Gleichungen für die Größen  $\partial E / \partial q_i$  auffaßt, so erhält man diese Größen genau durch dieselben Determinanten ausgedrückt, wie die Größen  $p'_i$ , wenn man letztere aus den  $s$  linearen Gleichungen 304) bestimmt. Wir sehen also, ohne daß wir alle diese Determinanten hinzuschreiben brauchen, ein, daß allgemein

$$306) \quad p'_i = \frac{\partial E}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots, s$$

sein muß. Differenzieren wir andererseits die Gleichung 291) nach der Zeit, so erhalten wir:

$$307) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d q_h}{d t} &= \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial p_h} + \sum_1^s \frac{\partial^2 W}{\partial p_h \partial p_i} p'_i \\ &= \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial p_h} + \sum_1^s \frac{\partial q_i}{\partial p_h} \frac{\partial E}{\partial q_i} \end{aligned} \right.$$

Andererseits ist die Gleichung 294) identisch erfüllt, wenn man darin  $W$  als Funktion von  $t$ ,  $p_h$  und  $\alpha_h$  substituiert und für die  $q_h = \partial W / \partial p_h$  die in diesem Sinne genommenen partiellen Differentialquotienten einsetzt. Es muß daher auch der partielle Differentialquotient der linken Seite der Gleichung 294) nach  $p_h$  gleich Null sein, bei dessen Bildung man  $t$  und die  $\alpha_h$  als konstant anzusehen, die  $q_h$  aber als Funktionen von  $t$ ,  $p_h$  und  $\alpha_h$  zu betrachten hat, so daß  $E$  in doppelter Weise zu differenzieren ist 1. weil es explizit die Größe  $p_h$  enthält, 2. weil die darin vorkommenden Größen  $q_i$  Funktionen von  $p_h$  sind. Setzt man den so gebildeten partiellen Differentialquotienten der Gleichung gleich Null, so ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial p_h} + \frac{\partial E}{\partial p_h} + \sum_{i=1}^{i=s} \frac{\partial E}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial p_h} = 0.$$

Subtrahiert man dies von der rechten Seite der Gleichung 307), so folgt

$$\frac{d q_h}{d t} = - \frac{\partial E}{\partial p_h} \quad h = 1, 2, \dots s.$$

Es ist also bewiesen, daß die Differentialquotienten der  $q_h$  nach der Zeit genau durch dieselben Gleichungen gegeben sind, welche für die mechanische Aufgabe gelten. Andererseits ist auch durch die Gleichungen 306) bewiesen, daß die  $p'_h$  aus  $E$  oder  $T$  (da ja

$$\frac{\partial E}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

ist) in derselben Weise wie beim mechanischen Probleme zu bilden sind. Da sie also dieselben linearen Funktionen

der  $q_h$  sind wie beim mechanischen Probleme und da wir schon sahen, daß die Differentialquotienten der  $q_h$  nach der Zeit dieselben Werte wie beim mechanischen Probleme haben, so folgt hieraus, daß auch die Ableitungen der  $p'_h$  nach der Zeit dieselben Werte wie beim mechanischen Probleme haben, also durch die Gleichungen 286) bestimmt sind. Es ist somit ganz allgemein bewiesen, daß die durch die Gleichungen 304) als Funktionen der Zeit und der 2s Integrationskonstanten  $\alpha_h$  und  $\beta_h$  bestimmten Werte der  $p_h$  die Integrale der mechanischen Differentialgleichungen sind.

(Die Ausführungen des § 57 lassen wieder so recht deutlich die universelle Bedeutung des Energiebegriffs erkennen. Man braucht bloß die Energie als Funktion der Koordinaten und Momente zu kennen und man ist unter Beiziehung der erforderlichen Anfangsbedingungen ohne weiteres imstande, die zeitliche Veränderung aller Koordinaten zu berechnen, ohne daß man ihre geometrische Bedeutung zu wissen braucht. Dies folgt übrigens auch schon aus den Gleichungen 72).

Falls  $V$  die Zeit nicht explizit enthält, kann man diese Variable immer aus der partiellen Differentialgleichung 301) hinwegschaffen, indem man setzt

$$308) \quad W = \alpha t + U,$$

wobei  $U$  nur Funktion der Koordinaten sein soll. Die Differentialgleichung 301) verwandelt sich dann in die folgende:

$$309) \quad \alpha + E\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right) = 0,$$

wobei das Symbol  $E\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)$  ausdrückt, daß man in die Funktion  $E = T + V$  für  $q_h$  zu substituieren hat  $\partial U / \partial p_h$ .

#### ✓ § 59. Berechnung der Wurfbewegung aus der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung als einfachstes illustrierendes Beispiel.

Wir wollen nun zunächst die Bedeutung dieser Formel an einem möglichst einfachen Beispiele ordern. Wir nehmen an, daß uns die Gesetze der Wurfbewegung noch

unbekannt wären und daß wir dieselben aus der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung ableiten wollten. Es sei uns ein einziger vollkommen freier materieller Punkt mit der Masse  $m$  und den drei rechtwinkligen Koordinaten  $x, y, z$  gegeben, auf den nur die Schwerkraft wirkt. Die konstante Richtung dieser letzteren wählen wir als positive  $x$ -Achse und bezeichnen die ebenfalls konstante Beschleunigung der Schwere mit  $g$ . Dann ist:

$$s = 3, \quad p_1 = x, \quad p_2 = y, \quad p_3 = z.$$

$$V = -mgx,$$

$$q_1 = mx', \quad q_2 = my', \quad q_3 = mz', \quad T = \frac{1}{2m}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2).$$

In den letzteren Ausdruck sind statt der  $q$  die partiellen Differentialquotienten von  $W$ , respektive wenn man, da  $V$  die Zeit nicht explizit enthält, die Gleichung 309) anwendet, von  $U$  nach den Koordinaten zu substituieren. Es wird also

$$E = T + V = \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] - mgx$$

und die Gleichung 309) geht daher über in

$$310) \quad \alpha + \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] - mgx = 0,$$

wobei  $W$  gleich  $\alpha t + U$  ist. Da es sich nur um die Auffindung eines vollständigen Integralen handelt, so wollen wir setzen:  $U = U_1 + U_2 + U_3$ , wobei  $U_1$  nur Funktion von  $x$ ,  $U_2$  nur Funktion von  $y$ ,  $U_3$  nur Funktion von  $z$  sein soll. Die partiellen Differentialquotienten verwandeln sich dann in gewöhnliche und die Gleichung 310) geht über in

$$2\alpha m + \left( \frac{dU_1}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dU_2}{dy} \right)^2 + \left( \frac{dU_3}{dz} \right)^2 - 2m^2gx = 0,$$

welche sicher erfüllt ist, wenn wir setzen:

$$311) \quad \begin{cases} \frac{dU_1}{dx} = \alpha_1, & \frac{dU_2}{dy} = \alpha_2, & \frac{dU_3}{dz} = \sqrt{\alpha_3 + 2m^2gx} \\ \alpha = -\frac{1}{2m}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3). \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 311) folgt:

$$U_1 = \alpha_1 x + C_1, \quad U_2 = \alpha_2 y + C_2$$

$$U_3 = \frac{1}{2m^2g} \sqrt{\alpha_3 + 2m^2gx}^2 + C_3,$$

daher, da die Konstanten  $C_1, C_2, C_3$  alle additiv zu  $W$  hinzukommen und deshalb weggelassen werden können

$$W = -\frac{1}{2m}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \frac{1}{3m^2 g} \sqrt{\alpha_3 + 2m^2 g} z^3.$$

Setzen wir

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} = \frac{\beta_3}{m g},$$

so erhalten wir also die drei Bewegungsgleichungen in der Form:

$$x = \frac{\alpha_1}{m} t + \beta_1, \quad y = \frac{\alpha_2}{m} t + \beta_2,$$

$$z = g \frac{t^2}{2} + 2\beta_3 t + \alpha_4,$$

wobei

$$\alpha_4 = \frac{2\beta_3^2}{g} - \frac{\alpha_3}{2m^2 g}$$

eine einfachere statt  $\alpha_3$  eingeführte Konstante ist. Dies sind in der Tat die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen für einen geworfenen Körper und es sind auch

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \alpha_1, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = \alpha_2, \quad \frac{\partial W}{\partial z} = \sqrt{\alpha_3 + 2m^2 g x}$$

die Momente  $m x', m y'$  und  $m z'$  bezüglich der Koordinatenachsen.

Wir wollen nun zu Fällen übergehen, wo die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung von wirklichem Nutzen ist, die also nicht mehr bloß den Charakter erläuternder Beispiele haben. Wir müssen da zunächst eine eigentümliche Art generalisierter Koordinaten, die sogenannten elliptischen, kennen lernen.

### § 60. Elliptische Koordinaten.

Es seien drei voneinander verschiedene positive, ein für allemal konstante Größen gegeben, deren größte wir mit  $a_1$ , deren mittlere mit  $a_2$ , deren kleinste wir mit  $a_3$  bezeichnen, so daß also:

$$a_1 > a_2 > a_3.$$

Ferner seien  $x_1, x_2, x_3$  die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes im Raume. Wir denken uns für einen Augenblick auch diesen Größen  $x_1, x_2, x_3$  bestimmte konstante endliche reelle, von Null verschiedene Werte erteilt. Dann wird der Ausdruck

$$\frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \lambda}$$

eine Funktion  $\psi(\lambda)$  des Wertes von  $\lambda$  sein, den wir augenblicklich allein als variabel betrachten.

Wir wollen eine negative Größe als um so kleiner bezeichnen, je größer ihr Zahlenwert ist, was wir eine Ungleichheit mit Einrechnung des Vorzeichens nennen wollen. Dann wächst  $\psi(\lambda)$  kontinuierlich von 0 bis  $+\infty$ , d. h. bis zu einem beliebig großen positiven Werte, wenn  $\lambda$  kontinuierlich von  $+\infty$  bis  $-a_3^2 + \varepsilon$  abnimmt, wobei  $\varepsilon$  im folgenden immer eine positive Größe sein soll, deren Wert man so klein wählen kann, als man nur will. Es muß also für irgend einen zwischen diesen Grenzen liegenden Wert  $\lambda_3$  von  $\lambda$  die Funktion  $\psi(\lambda)$  gleich 1 werden.

$\psi(\lambda)$  wächst nochmals kontinuierlich von  $-\infty$  bis  $+\infty$ , wenn  $\lambda$  kontinuierlich von  $-a_3^2 - \varepsilon$  bis  $-a_1^2 + \varepsilon$  abnimmt. Für einen zwischen diesen Grenzen liegenden Wert  $\lambda_2$  von  $\lambda$  muß also nochmals  $\psi(\lambda) = 1$  werden.

Endlich wächst  $\psi(\lambda)$  zum zweiten Male von  $-\infty$  bis  $+\infty$ , wenn  $\lambda$  kontinuierlich von  $-a_2^2 - \varepsilon$  bis  $-a_1^2 + \varepsilon$  abnimmt. Zwischen diesen Grenzen liegt ein dritter Wert  $\lambda_1$  von  $\lambda$ , für den nochmals  $\psi(\lambda)$  gleich 1 wird, für  $\lambda < -a_1^2$  bleibt  $\psi(\lambda)$  negativ. Es hat also die Gleichung

$$312) \quad \frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \lambda} = 1,$$

welche sich durch Multiplikation mit  $(a_1^2 + \lambda)(a_2^2 + \lambda)(a_3^2 + \lambda)$  in eine gewöhnliche algebraische Gleichung dritten Grades verwandelt, stets drei reelle Wurzeln  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  und es ist

$$313) \quad +\infty > \lambda_3 > -a_3^2 > \lambda_2 > -a_2^2 > \lambda_1 > -a_1^2.$$

Wir heben noch folgende Spezialfälle hervor:

1. Wenn  $x_1$  sich beliebig der Null nähert, so nähert sich  $\lambda_1$  der Grenze  $-a_1^2$ , während sich  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  den beiden Wurzeln der Gleichung

$$314) \quad \frac{x_1^2}{a_2^2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \lambda} = 1$$

nähern. Wir wollen daher sagen, für  $x_1 = 0$  ist  $\lambda_1 = -a_1^2$ ,  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  aber sind die Wurzeln der Gleichung 314), von denen man, wie oben, beweist, daß wenn  $x_2$  und  $x_3$  von Null verschieden sind, die eine zwischen  $+\infty$  und  $-a_3^2$ , die andere zwischen  $-a_3^2$  und  $-a_2^2$  liegt. Wir wollen die erste mit  $\lambda_3$ , die zweite mit  $\lambda_2$  bezeichnen.

2. Wenn sich  $x_3$  der Null nähert, während  $x_1$  und  $x_2$  von Null verschieden sind, so nähert sich entweder  $\lambda_1$  oder  $\lambda_2$  der Grenze  $-a_2^2$ , je nachdem die kleinere Wurzel der Gleichung

$$315) \quad \frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{a_3^2 + \lambda} = 1$$

a) kleiner, b) größer als  $-a_3^2$  ist. Wenn daher  $x_3 = 0$ ,  $x_1$  und  $x_2$  aber von Null verschieden sind, so setzen wir im ersten Falle  $\lambda_2 = -a_2^2$ ,  $\lambda_1$  gleich der kleineren dieser Wurzeln, im zweiten Falle  $\lambda_1 = -a_2^2$  und  $\lambda_2$  gleich der kleineren dieser Wurzeln, wogegen  $\lambda_3$  immer gleich der größeren Wurzel der Gleichung 315) zu setzen ist.

3. Ebenso ist, wenn  $x_3 = 0$ ,  $x_1$  und  $x_2$  aber von Null verschieden sind,  $\lambda_2$  oder  $\lambda_3 = -a_3^2$ ,  $\lambda_1$  gleich der kleinsten Wurzel der Gleichung

$$316) \quad \frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \lambda} = 1$$

und  $\lambda_3$  oder  $\lambda_2$  gleich der größeren Wurzel dieser Gleichung zu setzen, je nachdem dieselbe a) größer oder b) kleiner als  $-a_2^2$  ist.

4. Ist  $x_1 = x_2 = 0$ , so setzen wir:

$$\lambda_1 = -a_1^2, \quad \lambda_2 = -a_2^2, \quad \lambda_3 = x_3^2 - a_3^2.$$

5. Für  $x_1 = x_3 = 0$  wird:

$$\lambda_1 = -a_1^2 \quad \text{und}$$

a) falls  $x_2^2 < a_1^2 - a_3^2$ :

$$\lambda_3 = -a_3^2, \quad \lambda_2 = x_2^2 - a_2^2,$$

b) für  $x_2^2 > a_1^2 - a_3^2$ :

$$\lambda_3 = x_2^2 - a_2^2, \quad \lambda_2 = -a_3^2, \quad \text{endlich}$$

c) für  $x_2^2 = a_1^2 - a_3^2$ :

$$\lambda_3 = \lambda_2 = -a_3^2.$$

6) Für  $x_3 = x_3 = 0$  wird

a) falls  $x_1^2 > a_1^2 - a_3^2$ :

$$\lambda_3 = x_1^2 - a_1^2, \quad \lambda_2 = -a_3^2, \quad \lambda_1 = -a_2^2,$$

b) für  $x_1^2 = a_1^2 - a_3^2$ :

$$\lambda_3 = \lambda_2 = -a_3^2, \quad \lambda_1 = -a_2^2,$$

c) für  $a_1^2 - a_3^2 > x_1^2 > a_1^2 - a_2^2$ :

$$\lambda_3 = -a_3^2, \quad \lambda_2 = x_1^2 - a_1^2, \quad \lambda_1 = -a_2^2,$$

d) für  $x_1^2 = a_1^2 - a_2^2$ :

$$\lambda_3 = -a_3^2, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -a_2^2,$$

e) für  $x_1^2 < a_1^2 - a_2^2$ :

$$\lambda_3 = -a_3^2, \quad \lambda_2 = -a_2^2, \quad \lambda_1 = x_1^2 - a_1^2.$$

7. Wenn sich endlich  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  gleichzeitig der Grenze Null nähern, so nähern sich  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  gleichzeitig den Grenzen  $-a_1^2$ ,  $-a_2^2$  und  $-a_3^2$ , weshalb wir für  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  setzen wollen:

$$\lambda_3 = -a_3^2, \quad \lambda_2 = -a_2^2, \quad \lambda_1 = -a_1^2.$$

Falls mindestens eine der Koordinaten unendlich wird, setzen wir  $\lambda_3 = \infty$ . Wenn dann eine oder zwei der rechtwinkligen Koordinaten endlich oder unendlich niedrigerer Ordnung sind, so ist eines oder zwei der  $\lambda$  gleich einem  $a^2$ . Sind zwei rechtwinklige Koordinaten  $x_h$  und  $x_k$  untereinander von gleicher und von höherer Ordnung unendlich als die dritte, so folgt ein  $\lambda$  aus der Gleichung

$$317) \quad \frac{x_h^2}{x_k^2} = -\frac{a_h^2 + \lambda}{a_k^2 + \lambda};$$



sind endlich alle drei rechtwinkligen Koordinaten unendlich von gleicher Größenordnung, so sind für  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$318) \quad \frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \lambda} = 0$$

zu wählen.

Nach diesen Festsetzungen gehört zu jeder Terne von reellen Werten der Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  eine und nur eine bestimmte Terne von reellen Werten von  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , welche, falls keine der Koordinaten Null oder unendlich ist, den Ungleichungen 313) genügen. Lassen wir dagegen auch die Werte Null oder unendlich der Koordinaten zu, so genügen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  Relationen, welche sonst mit den Ungleichungen 313) identisch sind, nur daß an Stelle jedes Ungleichheitszeichens das Gleichheitszeichen oder Gleichheitszeichen stehen kann.

Die Relationen, welche hierdurch aus den Ungleichungen 313) entstehen, nennen wir die Relationen 313a).

Ebenso gehört zu jeder Terne von reellen Werten von  $\lambda_1, \lambda_2$  und  $\lambda_3$ , welche den Ungleichungen 313) oder den Relationen 313a) genügen, eine und nur eine Terne, von reellen positiven Werten von  $x_1^2, x_2^2$  und  $x_3^2$ ; wenn an Stelle der Ungleichungen 313) die Relationen 313a) treten, werden auch die Werte Null und unendlich für jede der Koordinaten zulässig. Es sind also auch  $x_1, x_2$  und  $x_3$ , folglich auch die Lage des Punktes, dessen Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  sind, im Raume eindeutig bestimmt, sobald die zu  $x_1, x_2, x_3$  gehörige Terne der Werte von  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  und noch das Vorzeichen der Koordinaten gegeben ist.

Wir können daher als generalisierte Koordinaten, durch welche die Lage irgend eines Punktes im Raume bestimmt ist, die zu den rechtwinkligen Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  desselben gehörigen Werte von  $\lambda_1, \lambda_2$  und  $\lambda_3$  benutzen. Man nennt sie die elliptischen Koordinaten des betreffenden Punktes. Sie bestimmen die Lage desselben eindeutig, wenn noch das Vorzeichen der drei rechtwinkligen Koordinaten gegeben ist. Es sind also  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  eindeutige Funk-

tionen von  $x_1, x_2, x_3$ , umgekehrt sind  $x_1, x_2, x_3$  Funktionen von  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , die durch die letzteren Variablen bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt sind.

### § 61. Geometrische Bedeutung der elliptischen Koordinaten.

Wir wollen nun das bisher Gesagte geometrisch interpretieren. Wir betrachten da zunächst in Gleichung 312) nebst  $a_1, a_2, a_3$ , welche wie immer gegebene, ein für allemal konstante Größen sein sollen, auch  $\lambda$  konstant. Die Gleichung gibt uns dann eine Relation zwischen den Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$ , welcher alle Punkte einer gewissen Zentralfläche  $F$  zweiten Grades genügen. Wir nennen sie die dem betreffenden  $\lambda$  entsprechende Fläche zweiten Grades. Da in der Gleichung 312) alle ungeraden Potenzen der Koordinaten fehlen, so ist der Koordinatenursprung immer ihr Mittelpunkt und die Koordinatenachsen sind ihre Achsen.

Sehr großen positiven Werten von  $\lambda$  entspricht sehr nahe eine Kugel von sehr großem Radius. Diese verwandelt sich, wenn  $\lambda$  bis  $-a_3^2$  abnimmt, in ein immer kleiner werdendes dreiachsiges Ellipsoid, dessen größte Achse die Richtung der  $x_1$ -Achse, dessen kleinste die der  $x_3$ -Achse hat. Dasselbe nähert sich, je mehr sich  $\lambda$  der Grenze  $-a_3^2$  nähert, immer mehr der Fläche einer in der  $x_1 x_2$ -Ebene liegenden Ellipse  $E$ , deren Achsen die Koordinatenachsen sind und deren Halbachsen gleich  $\sqrt{a_1^2 - a_3^2}$  und  $\sqrt{a_2^2 - a_3^2}$  sind, welche also die Gleichungen hat:

$$319) \quad \frac{x_1^2}{a_1^2 - a_3^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2 - a_3^2} = 1, \quad x_3 = 0.$$

Wenn man zuerst dem  $\lambda$  einen sehr großen positiven, dann einen um eine sehr kleine Größe  $\epsilon$  kleineren, dann wieder einen um  $\epsilon$  kleineren Wert etc. erteilt, so erhält man lauter dreiachsige Ellipsoide, von denen jedes ganz innerhalb der vorigen liegt; der Raum wird also in lauter unendlich dünne ellipsoidische Schalen zerlegt, welche den ganzen unendlichen Raum vollständig erfüllen.

Ist  $\lambda$  wenig kleiner als  $-a_3^2$ , so ist die Fläche  $F$  ein einschaliges Hyperboloid, welches noch fast mit demjenigen

Teile der  $x_1 x_2$ -Ebene zusammenfällt, welcher außerhalb der Ellipse  $E$  liegt. Daher können wir sagen, daß die Fläche  $F$  für den Fall  $\lambda = -a_3^2$  in die  $x_1 x_2$ -Ebene degeneriert und wir werden nach dem früheren Übereinkommen  $\lambda$ , so lange es größer als  $-a_3^2$  ist und auch noch so lange es einem Punkte des von der Ellipse  $E$  umschlossenen Stückes der  $x_1 x_2$ -Ebene entspricht, mit  $\lambda_3$  bezeichnen. Sobald es gleich  $-a_3^2$  ist, aber einem Punkte der  $x_1 x_2$ -Ebene entspricht, der außerhalb jener Ellipse liegt, oder sobald es zwischen  $-a_3^2$  und  $-a_2^2$  liegt, also einem einschaligen Hyperboloide entspricht, werden wir es mit  $\lambda_3$  bezeichnen, wogegen auf dem Umfange der Ellipse  $\lambda_3 = \lambda_2 = -a_3^2$  ist.

Nimmt nun  $\lambda$ , welches jetzt  $\lambda_3$  heißt, von  $-a_3^2$  bis  $-a_2^2$  ab, so breitet sich das einschalige Hyperboloid aus und geht für  $\lambda = -a_2^2$  in denjenigen zusammenhängenden Teil der  $x_1 x_3$ -Ebene über, welcher von den beiden Ästen  $A_h$  der Hyperbel

$$320) \quad \frac{x_1^2}{a_1^2 - a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2 - a_2^2} = 1, \quad x_2 = 0$$

begrenzt ist, für welchen also  $\frac{x_1^2}{a_1^2 - a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2 - a_2^2} < 1$  ist. Auf diesem Teile der  $x_1 x_3$ -Ebene ist  $\lambda$  noch mit  $\lambda_2$  zu bezeichnen. Der andere Teil der  $x_1 x_3$ -Ebene, für welchen  $\lambda$  ebenfalls gleich  $-a_2^2$  ist, aber schon mit  $\lambda_1$  bezeichnet werden soll, ist die Grenze der zweischaligen Hyperboloide, in welche die Fläche  $F$  übergeht, sobald  $\lambda < -a_2^2$  wird. Nähert sich  $\lambda$  dem Werte  $-a_1^2$ , so nähern sich beide Schalen dieser Hyperboloide von beiden Seiten immer mehr der gesamten  $x_2 x_3$ -Ebene.

Alle die einschaligen Hyperboloide, welche man erhält, wenn man

$$\lambda = -a_3^2 - \varepsilon, \quad \lambda = -a_3^2 - 2\varepsilon \dots \lambda = -a_2^2$$

setzt und von denen wieder jedes folgende das vorhergehende nirgends schneidet, aber ihm überall unendlich nahe liegt, erfüllen wieder den ganzen unendlichen Raum kontinuierlich und zerlegen jede der früher besprochenen ellipsoidischen Schichten in lauter Ringe von unendlich kleinem Querschnitte.

Alle zweischaligen Hyperboloide endlich, welche den Werten  $\lambda = -a_2^2 - \varepsilon$ ,  $-a_2^2 - 2\varepsilon \dots - a_1^2$  entsprechen, erfüllen noch einmal in derselben Weise den ganzen unendlichen Raum kontinuierlich und zerlegen jeden der besprochenen Ringe in lauter unendlich kleine Volumenelemente. Diese Volumenelemente sind rechtwinklige Parallelepipede, da sich, wie wir sofort beweisen werden, je ein Ellipsoid, je ein einschaliges und je ein zweischaliges Hyperboloid immer rechtwinklig durchschneiden.

Alle diese Formen, welche die Fläche  $F$  der Reihe nach annimmt, sind (die Fälle ausgenommen, wo sie in eine ebene Fläche degeneriert) konzentrische und koaxiale Flächen zweiten Grades, d. h. sie haben alle denselben Mittelpunkt (den Koordinatenursprung), und gleichgerichtete Achsen (die Koordinatenachsen). Sie sind auch konfokal, d. h. alle Kegelschnittlinien, in welchen sie durch die  $x_1 x_2$ -Ebene geschnitten werden, haben dieselben Brennpunkte, ebenso haben alle Kegelschnittlinien, in welchen sie durch die  $x_1 x_3$ -Ebene geschnitten werden, untereinander und alle, in welchen sie durch die  $x_2 x_3$ -Ebene geschnitten werden, wieder untereinander dieselben Brennpunkte.

Für die Schnitte mit der  $x_1 x_2$ -Ebene liegen die Brennpunkte auf der  $x_1$ -Achse in der Entfernung  $\sqrt{a_1^2 - a_2^2}$  vom Koordinatenursprunge  $O$ , für die Schnitte mit der  $x_1 x_3$ -Ebene ebenfalls auf der  $x_1$ -Achse in der Entfernung  $\sqrt{a_1^2 - a_3^2}$  von  $O$ , für die Schnitte mit der  $x_2 x_3$ -Ebene auf der  $x_2$ -Achse in der Entfernung  $\sqrt{a_2^2 - a_3^2}$  von  $O$ .

Man sieht dies leicht ein, wenn man bedenkt, daß, wenn  $A$  und  $B$  beliebige positive oder negative Konstanten sind und mit Einrechnung des Vorzeichens  $A > B$  ist, die beiden Brennpunkte der Kegelschnittlinie, welche die Gleichung  $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$  hat, auf der  $x$ -Achse in der Entfernung  $\sqrt{A - B}$  vom Koordinatenursprunge liegen. Dies gilt sowohl, wenn  $A$  und  $B$  positiv sind, also die Kegelschnittlinie eine Ellipse ist, als auch wenn  $A$  positiv, dagegen  $B$  negativ ist, also die Kegelschnittlinie eine Hyperbel ist. Ja selbst wenn  $A$  und  $B$  beide negativ sind, also die Kegelschnitt-

linie ganz imaginär wird, was bei den Durchschnittslinien der oben betrachteten zweischaligen Hyperboloide mit der  $x_2 x_3$  Ebene zutrifft, pflegt man diese Punkte noch immer ihre Brennpunkte zu nennen und zu sagen, daß diese reell bleiben.

Den drei Werten des  $\lambda$ , welche den Koordinaten eines gegebenen Punktes entsprechen und also gegenwärtig von uns als dessen generalisierte Koordinaten bezeichnet werden, entsprechen also immer drei konzentrische, koaxiale, homofokale Flächen zweiten Grades, ein dreiaxsiges Ellipsoid, ein einschaliges und zweifächeriges Hyperboloid, welche sich, da die Koordinaten des gegebenen Punktes die Gleichung jeder der drei Flächen erfüllen, in dem gegebenen Punkte schneiden.

Falls eine oder zwei oder alle drei Koordinaten Null werden, degenerieren eine oder zwei oder alle drei Flächen

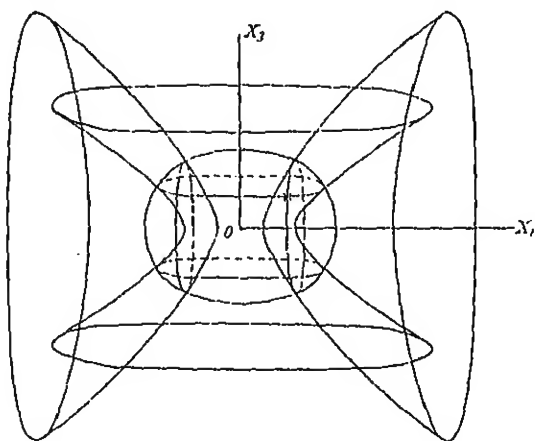


Fig. 8.

in eine oder in einen Teil einer der Koordinatenebenen. Falls mindestens eine der Koordinaten unendlich ist, degeneriert das Ellipsoid in eine Kugel von unendlichem Radius.

In Fig. 8 ist das Ellipsoid und das ein- und zweifächerige Hyperboloid (perspektivisch freilich nicht ganz

richtig) gezeichnet, welche sich in dem mit einem Kreuze markierten beliebigen Punkte des Raumes durchschneiden. Auch sind die Durchschnittslinien der beiden Hyperboloide mit dem Ellipsoide gezeichnet. Wenn man diese Figur betrachtet, kann man sich leicht klar machen, wie die verschiedenen Flächen degenerieren, wenn gewisse Koordinaten des Durchschnittspunktes Null oder unendlich werden.

### § 62. Die elliptischen Koordinaten sind orthogonal.

$\lambda_3$  ist die größte Wurzel der Gleichung 312), kann also als eine Funktion von  $x_1, x_2, x_3$  (sagen wir  $f(x_1, x_2, x_3)$ ) betrachtet werden, welche man z. B. mittels der Cardanischen Formel explizit hinschreiben könnte, da ja die Gleichung 312) eine Gleichung dritten Grades für  $\lambda$  ist.

Lassen wir in dieser Funktion  $x_2$  und  $x_3$  konstant und betrachten bloß  $x_1$  als veränderlich, so können wir ihren partiellen Differentialquotienten  $\partial \lambda_3 / \partial x_1$  bilden. Dieser wird am besten in folgender Weise gefunden: Da  $\lambda_3$  Wurzel der Gleichung 312) ist, so hat man:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda_3} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \lambda_3} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \lambda_3} = 1.$$

Läßt man darin  $x_2$  und  $x_3$  konstant, so folgt:

$$\frac{\partial \lambda_3}{\partial x_1} = \frac{2}{A_3^2} \cdot \frac{x_1}{a_1^2 + \lambda_3}.$$

Die analogen Gleichungen, welche man erhält, wenn man  $\lambda_3$  nach  $x_2, x_3$  und  $\lambda_2$  und  $\lambda_1$  nach allen  $x$  partiell differenziert, kann man in die Form

$$321) \quad \frac{\partial \lambda_h}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{A_h^2(a_i^2 + \lambda_h)}$$

zusammenfassen, wobei sowohl  $i$  als auch  $h$  unabhängig voneinander jeden der drei Werte 1, 2 oder 3 haben können.  $A$  ist dabei eine abgekürzte Bezeichnung und es ist allgemein

$$322) \quad A_h = \sqrt{\sum_i \frac{x_i^2}{(a_i^2 + \lambda_h)^2}},$$

wobei wir immer das positive Zeichen der Wurzel wählen wollen. Der Index  $i$  unter dem Summenzeichen hat, wie hier immer die Bedeutung, daß dem  $i$  alle drei Werte 1, 2 und 3 zu erteilen sind, wogegen dem  $h$  ein bestimmter dieser drei Werte zu geben ist, gleichgültig welcher.

Die Gleichung des durch einen gegebenen Punkt gehenden dreiachsigen Ellipsoids finden wir, wenn wir die soeben mit  $f(x_1, x_2, x_3)$  bezeichnete Funktion, welche uns  $\lambda_3$  durch  $x_1, x_2, x_3$  ausdrückt, gleich einer Konstanten, nämlich gleich dem diesem Punkte entsprechenden speziellen Werte von  $\lambda_3$  setzen. Die Richtungskosinus der an dieses Ellipsoid im gegebenen Punkte errichteten Normalen  $N_3$  sind daher nach den bekannten Formeln für die Richtungskosinus der an eine Fläche mit der Gleichung  $f(x_1, x_2, x_3) = \text{konst.}$  gezogenen Normalen

$$\cos(N_3, x_1) = \frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_1},$$

$$\cos(N_3, x_2) = \frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$\cos(N_3, x_3) = \frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

wobei  $n$  die positive Wurzel aus

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2$$

ist. Dabei sind die partiellen Differentialquotienten  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  etc. so zu verstehen: es ist  $\lambda_3$  als Funktion  $f(x_1, x_2, x_3)$  von  $x_1, x_2, x_3$  auszudrücken und dann, bei konstantem  $x_2$  und  $x_3$  nach  $x_1$  zu differenzieren etc. Es ist also  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$  etc. genau dasselbe, was wir in den Formeln 321) mit  $\frac{\partial \lambda_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \lambda_3}{\partial x_2}$  etc. bezeichneten. Wenn wir daher zu dieser Bezeichnungsweise zurückkehren, so erhalten wir

$$\cos(N_3, x_1) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \lambda_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda_3}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda_3}{\partial x_3}\right)^2}} \cdot \frac{\partial \lambda_3}{\partial x_1}$$

und nach Substitution der Werte 321) und 322)

$$\cos(N_3, x_1) = \frac{1}{A_3^2} \frac{x_1}{a_1^2 + \lambda_3}.$$

Ebenso folgt:

$$\cos(N_3, x_2) = \frac{1}{A_3^2} \frac{x_2}{a_2^2 + \lambda_3},$$

$$\cos(N_3, x_3) = \frac{1}{A_3^2} \frac{x_3}{a_3^2 + \lambda_3}.$$

Die Gleichung des einschaligen, durch denselben Punkt mit den Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  gehenden Hyperboloids erhalten wir in gleicher Weise, wenn wir zuerst die mittlere Wurzel  $\lambda_2$  der Gleichung 312) als Funktion  $\varphi$  von  $x_1, x_3, x_3$  ausdrücken und dann diese Funktion  $\varphi$  gleich dem dem betreffenden Punkte entsprechenden Werte von  $\lambda_3$  setzen. Die Richtungskosinus der im selben Punkt an das einschalige Hyperboloid errichteten Normalen  $N_2$  sind dann wieder den Größen  $\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_1}, \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_2}, \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_3}$  proportional und analoges gilt für die Normale  $N_1$ , die man durch denselben Punkt mit den Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  zu dem durch diesen Punkt gehenden zweifächerigen Hyperboloide ziehen kann. Die Formeln, welche man für die Richtungskosinus aller dieser Normalen erhält, kann man in die Formel zusammenfassen:

$$323) \quad \cos(N_h, x_i) = \frac{1}{A_h^2} \frac{x_i}{a_i^2 + \lambda_h}.$$

Der Kosinus des Winkels, welchen irgend zwei ( $N_h$  und  $N_{h+1}$ ) von diesen drei Normalen miteinander einschließen, ist daher

$$\begin{aligned} \cos(N_h, N_{h+1}) &= \cos(N_h, x_1) \cos(N_{h+1}, x_1) + \\ &+ \cos(N_h, x_2) \cos(N_{h+1}, x_2) + \cos(N_h, x_3) \cos(N_{h+1}, x_3) = \\ &= \frac{1}{A_h^2 A_{h+1}^2} \sum_i \frac{x_i^2}{(a_i^2 + \lambda_h)(a_i^2 + \lambda_{h+1})}. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\frac{x_i^2}{(a_i^2 + \lambda_h)(a_i^2 + \lambda_{h+1})} = \frac{1}{\lambda_h - \lambda_{h+1}} \left( \frac{x_i^2}{a_i^2 + \lambda_{h+1}} - \frac{x_i^2}{a_i^2 + \lambda_h} \right),$$

daher



$$\sum_i \frac{x_i^2}{(a_i^2 + \lambda_h)(a_i^2 + \lambda_{h+1})} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_h - \lambda_{h+1}} \left[ \sum_i \frac{x_i^2}{a_i^2 + \lambda_{h+1}} - \sum_i \frac{x_i^2}{a_i^2 + \lambda_h} \right].$$

In diesen Formeln kann  $h$  jeden beliebigen der Werte 1, 2 oder 3 annehmen, im letzteren Falle aber müssen wir den Index 4 immer als gleichbedeutend mit dem Index 1 betrachten. Wir wollen in allen analogen Formeln auch den Index 5 mit dem Index 2 etc., d. h. also alle Mod. drei kongruenten Zahlen, wenn sie im Index stehen, als gleichbedeutend betrachten. Der Punkt mit den Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$ , in welchem die beiden Normalen  $N_h$  und  $N_{h+1}$  errichtet sind, gehört beiden Zentralfächern zweiten Grades, zu denen diese beiden Normalen gezogen sind, an; daher müssen seine Koordinaten die Gleichung jeder dieser Zentralfächern erfüllen, es haben also beide Summen in der eckigen Klammer der rechten Seite der letzten Gleichung den Wert 1. Diese eckige Klammer reduziert sich auf Null und man erhält:

$$324) \quad \sum_i \frac{x_i^2}{(a_i^2 + \lambda_h)(a_i^2 + \lambda_{h+1})} = 0,$$

daher auch:

$$325) \quad \cos(N_h, N_{h+1}) = 0.$$

Alle drei Zentralfächern zweiten Grades durchschneiden sich daher in jedem Punkte rechtwinklig. Die Transformation in elliptischen Koordinaten ist eine Orthogonale. Man nennt die Einführung von  $f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3), f_3(x_1, x_2, x_3)$  statt  $x_1, x_2, x_3$  als Koordinaten orthogonal, sobald sich die drei Flächen, welche man erhält, wenn man  $f_1, f_2$  und  $f_3$  gleich drei beliebigen Konstanten setzt, immer rechtwinklig durchschneiden.

### § 63. Ausdruck der rechtwinkligen Koordinaten durch die elliptische.

Wir wollen nun die umgekehrte Aufgabe in Angriff nehmen, wenn  $\lambda_1, \lambda_2$  und  $\lambda_3$  gegeben sind, die dazu gehörigen Werte von  $x_1, x_2, x_3$  als Funktionen von  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  und

natürlich der immer konstant betrachteten Größen  $a_1, a_2, a_3$  zu berechnen. Wir denken uns zunächst noch den drei Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  bestimmte konstante Werte, dem  $\lambda$  dagegen einen ganz beliebigen Wert beigelegt, so daß in dem Ausdrucke

$$326) \quad \varphi(\lambda) = \frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \lambda} - 1$$

zunächst  $\lambda$  allein als variabel betrachtet wird. Wir setzen ferner

$$327) \quad f(\lambda) = (a_1^2 + \lambda)(a_2^2 + \lambda)(a_3^2 + \lambda)\varphi(\lambda).$$

Dann ist  $f(\lambda)$  eine ganze Funktion dritten Grades bezüglich  $\lambda$  und die immer mit  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  bezeichneten Größen sind die Wurzeln der Gleichung  $f(\lambda) = 0$ . Nach einem bekannten Satz aus der Theorie der Gleichungen ist also:

$$328) \quad f(\lambda) = A(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3).$$

Setzt man hier für  $f(\lambda)$  den Wert 327) ein, wobei für  $\varphi(\lambda)$  noch der Wert 326) zu substituieren ist, folgt so  $A = -1$ , da der Koeffizient von  $\lambda^3$  beiderseits gleich sein muß und man erhält:

$$329) \quad \begin{cases} x_1^2(a_2^2 + \lambda)(a_3^2 + \lambda) + x_2^2(a_1^2 + \lambda)(a_3^2 + \lambda) + x_3^2(a_1^2 + \lambda)(a_2^2 + \lambda) \\ - (a_1^2 + \lambda)(a_1^2 + \lambda)(a_3^2 + \lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda). \end{cases}$$

Diese Gleichung gilt für jeden Wert von  $\lambda$ ; es ist eine identische Gleichung, wenn man darin für  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  deren Werte als Funktionen von  $x_1, x_2, x_3$ , oder umgekehrt für  $x_1, x_2, x_3$  deren Werte als Funktionen von  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  substituiert. Obige Gleichung bleibt also stets richtig, was immer man für  $\lambda$  für einen Wert substituieren mag.

Setzt man darin  $\lambda = -a_1^2$ , so erhält man:

$$330) \quad x_1^2 = \frac{(a_1^2 + \lambda_1)(a_1^2 + \lambda_2)(a_1^2 + \lambda_3)}{(a_1^2 - a_2^2)(a_1^2 - a_3^2)}.$$

Setzt man dagegen in die Gleichung 329)  $\lambda = -a_2^2$ , so folgt:

$$331) \quad x_2^2 = \frac{(a_2^2 + \lambda_1)(a_2^2 + \lambda_2)(a_2^2 + \lambda_3)}{(a_2^2 - a_1^2)(a_2^2 - a_3^2)}.$$

Setzt man endlich  $\lambda = -a_3^2$ , so folgt:

$$332) \quad x_3^2 = \frac{(a_3^2 + \lambda_1)(a_3^2 + \lambda_2)(a_3^2 + \lambda_3)}{(a_3^2 - a_1^2)(a_3^2 - a_2^2)}.$$

Wir wollen nun allen drei Größen  $\lambda_1, \lambda_2$  und  $\lambda_3$  willkürliche unendlich kleine Zuwächse  $d\lambda_1, d\lambda_2, d\lambda_3$  erteilen. Die dadurch entstehenden Zuwächse  $x_1, x_2, x_3$  nennen wir deren vollständige Differentiale. Wir finden sie am leichtesten, wenn wir von der linken und rechten Seite der Gleichungen 330) den natürlichen Logarithmus nehmen und dann die vollständigen Differentiale dieser beiden Logarithmen gleich setzen. Ebenso vorgehen wir mit Gleichung 331) und 332). Es folgen dann drei Gleichungen, welche wir in die gemeinsame Form

$$333) \quad dx_i = \sum_h \frac{x_i d\lambda_h}{2(a^2 + \lambda_h)}$$

zusammenfassen können. Wir wollen in der letzten Gleichung zuerst  $i = 1$ , dann  $i = 2$ , dann  $i = 3$  setzen, jede so erhaltene Gleichung quadrieren und dann die quadrierten Gleichungen addieren. Wir bekommen dann links den Ausdruck  $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \sum_i dx_i^2$ , den wir kürzer mit  $ds^2$  bezeichnen wollen. Auf der rechten Seite verschwinden die Koeffizienten von

$$d\lambda_1 \cdot d\lambda_2, \quad d\lambda_1 \cdot d\lambda_3 \quad \text{und} \quad d\lambda_2 \cdot d\lambda_3,$$

da dieselben genau gleich der Hälfte der Ausdrücke werden, welche in den Gleichungen 324) auf der linken Seite stehen, und vermöge dieser Gleichungen verschwinden. Der Koeffizient von  $d\lambda_h^2$  aber wird gleich dem vierten Teile des Quadrates des in Gleichung 322) mit  $A_h$  bezeichneten Ausdrucks. Man erhält also:

$$334) \quad ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \frac{1}{4}(A_1^2 d\lambda_1^2 + A_2^2 d\lambda_2^2 + A_3^2 d\lambda_3^2).$$

In dem Ausdrucke, wie er durch Gleichung 322) gegeben ist, kommen sowohl die  $x_1, x_2, x_3$  als auch die  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  vor; den Ausdruck, welchen man für  $A_h$  erhält, wenn man darin  $x_1, x_2, x_3$  ebenfalls durch die  $\lambda$  ausdrückt, so daß nur mehr die letzteren Variablen in  $A_h$  vorkommen, erhält man am kürzesten in folgender Weise.

Man betrachtet wieder in der durch die Gleichung 326) gegebenen Funktion  $\varphi(\lambda)$  die Größen  $x_1, x_2, x_3$ , daher auch

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  als konstant, die Größe  $\lambda$  dagegen als in beliebiger Weise veränderlich. Den Ausdruck, welchen man erhält, wenn man unter diesen Voraussetzungen den Differentialquotienten  $-\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda}$  bildet und darin nach geschehener

Differentiation  $\lambda = \lambda_1$  setzt, bezeichnen wir mit  $-\left[\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=\lambda_1}$ . Er ist genau gleich  $A_1^2$ , wie man sofort aus Gleichung 322) erkennt, wenn man darin  $h = 1$  setzt. Ebenso ist

$$-\left[\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=\lambda_2} = A_2^2, \quad -\left[\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=\lambda_3} = A_3^2,$$

wobei die den eckigen Klammern unten angehängten Indizes die analoge Bedeutung haben.

Nun ist, wie wir sahen, in Gleichung 328) der Koeffizient  $A = -1$ . Substituiert man den betreffenden Wert von  $f(\lambda)$  in die Gleichung 327), so folgt:

$$\varphi(\lambda) = \frac{(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)}{(a_1^2 + \lambda)(a_2^2 + \lambda)(a_3^2 + \lambda)}.$$

Bei der partiellen Differentiation nach  $\lambda$  sind  $x_1, x_2, x_3$ , daher auch  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , welche ja Funktionen von  $x_1, x_2, x_3$  sind, als konstant zu betrachten; es ist also

$$-\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)}{(a_1^2 + \lambda)(a_2^2 + \lambda)(a_3^2 + \lambda)}$$

mehr noch einer Reihe von Gliedern, von denen aber jedes für  $\lambda = \lambda_1$  verschwindet. Es ist also:

$$-\left[\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=\lambda_1} = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}{(a_1^2 + \lambda_1)(a_2^2 + \lambda_1)(a_3^2 + \lambda_1)}.$$

Diese Größe ist aber, wie wir sahen, gleich  $A_1^2$ . Bestimmt man in derselben Weise  $A_2^2$  und  $A_3^2$ , so erhält man drei Formeln, welche man in die folgende Form zusammenfassen kann:

$$335) \quad A_h = \sqrt{\frac{(\lambda_h - \lambda_{h+1})(\lambda_h - \lambda_{h+2})}{(a_1^2 + \lambda_h)(a_2^2 + \lambda_h)(a_3^2 + \lambda_h)}}.$$

Aus den Gleichungen 333) ergeben sich natürlich sofort die partiellen Differentialquotienten von  $x_1, x_2$  oder  $x_3$  nach

$\lambda_1, \lambda_2$  oder  $\lambda_3$ , wenn man erstere Größen als Funktion der letzteren auffaßt, z. B. die nach  $\lambda_1$ , indem man  $d\lambda_2 = d\lambda_3 = 0$  setzt. Alle diesbezüglichen partiellen Differentialquotienten kann man in die eine Form zusammenfassen

$$336) \quad \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_h} = \frac{x_i}{2(\alpha_i^2 + \lambda_h)},$$

wobei jeder der Indizes  $i$  und  $h$  unabhängig von dem anderen die Werte 1, 2 oder 3 annehmen kann. Vergleicht man dies noch mit der Formel 321), so kann man auch schreiben

$$337) \quad \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_h} = \frac{1}{4} A_h^2 \frac{\partial \lambda_h}{\partial x_i},$$

wo links die  $x$  als Funktionen der  $\lambda$ , rechts umgekehrt die  $\lambda$  als Funktionen der  $x$  zu betrachten sind. Die Gleichung 324) kann daher mit Rücksicht auf die Gleichungen 336) und 321) entweder in der Form

$$338) \quad \sum_i \frac{\partial \lambda_h}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_{h+1}}{\partial x_i} = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_h} \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_{h+1}} = 0$$

geschrieben werden, wobei wieder im Index alle Mod. 3 kongruenten Zahlen als gleichbedeutend zu betrachten sind. Da die Richtungskosinus der Normalen, die wir im vorigen Paragraphen mit  $N_h$  bezeichneten, den Größen  $\frac{\partial \lambda_h}{\partial x_1}, \frac{\partial \lambda_h}{\partial x_2}, \frac{\partial \lambda_h}{\partial x_3}$  proportional sind, so sind die linksstehenden der Relationen 338) nur die bekannten Gleichungen

$$\sum_i \cos(N_h, x_i) \cos(N_{h+1}, x_i) = 0,$$

welche ausdrücken, daß sich die Flächen zweiten Grades orthogonal schneiden. Analog sind die rechtsstehenden Relationen mit dem Gleichungen

$$\sum_i \cos(N_i, x_h) \cos(N_i, x_{h+1}) = 0$$

identisch.

Wir wollen nun mit  $A$  einen beliebigen Punkt des Raumes bezeichnen, der die rechtwinkligen Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  und die elliptischen Koordinaten  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  hat.

Ferner sei  $B$  der Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten  $x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3$  und den dazu gehörigen elliptischen Koordinaten  $\lambda_1 + d\lambda_1, \lambda_2 + d\lambda_2, \lambda_3 + d\lambda_3$ , wobei  $dx_1, dx_2, dx_3$  willkürlich sein können. Es sind dann  $d\lambda_1, d\lambda_2, d\lambda_3$  die entsprechenden Zuwächse der elliptischen Koordinaten. Es können aber auch  $d\lambda_1, d\lambda_2, d\lambda_3$  als willkürlich betrachtet werden, dann sind  $dx_1, dx_2, dx_3$  die dazu gehörigen Zuwächse der rechtwinkligen Koordinaten.

Die in Formel 334) mit  $ds$  bezeichnete Größe ist dann die Entfernung der beiden Punkte  $A$  und  $B$ . Diese Formel stellt also die Länge eines willkürlich im Raume gezogenen Linienelementes dar. Wenn speziell der Punkt  $B$  auf demselben einschaligen und zweischaligen Hyperboloide wie der Punkt  $A$  liegt und nur das Ellipsoid, welches durch  $B$  geht, dem Werte  $\lambda_3 + d\lambda_3$  von  $\lambda_3$  entspricht, während das Ellipsoid, welches durch den Punkt  $A$  geht, dem Werte  $\lambda_3$  entspricht, so wollen wir dem Punkte  $B$  den Index 3 anhängen und seine Entfernung  $AB_3$  vom Punkte  $A$  mit  $ds_3$  bezeichnen. In diesem Falle ist  $d\lambda_1 = d\lambda_2 = 0$ . Daher

$$339) \quad ds_3 = \frac{1}{2} A_3 d\lambda_3.$$

Die Gerade  $ds_3$  ist ein unendlich kleines, vom Punkte  $A$  aus gezogenes Stück der Durchschnittslinie des ein- und zweischaligen Hyperboloides, welche durch den Punkt  $A$  gehen, und steht, da diese beiden Flächen auf dem Ellipsoide senkrecht stehen, ebenfalls auf diesem senkrecht.

Der Wert, den  $ds$  annimmt, wenn  $d\lambda_1 = d\lambda_2 = 0$  gesetzt wird, soll mit  $ds_2$  bezeichnet werden. Es ist also

$$340) \quad ds_2 = \frac{1}{2} A_2 d\lambda_2 = AB_2$$

der Abstand des Punktes  $A$  mit den elliptischen Koordinaten  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  vom Punkte  $B_2$ , dessen elliptische Koordinaten  $\lambda_1, \lambda_2 + d\lambda_2, \lambda_3$  sind.  $ds_2$  kann auch als ein vom Punkte  $A$  aus gezogenes unendlich kleines Stück der Durchschnittslinie des durch  $A$  gehenden Ellipsoides mit dem durch  $A$  gehenden zweischaligen Hyperboloid definiert werden und steht senkrecht auf dem durch  $A$  gehenden einschaligen Hyperboloide.

Ebenso ist

$$341) \quad ds_1 = \frac{1}{2} A_1 d\lambda_1 = A B_1$$

der Abstand des Punktes  $A$  mit den elliptischen Koordinaten  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  und des Punktes  $B_1$  mit den elliptischen Koordinaten  $\lambda_1 + d\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  oder ein von  $A$  aus gezogenes unendlich kleines Stück der Durchschnittslinie des durch  $A$  gehenden Ellipsoides und einschaligen Hyperboloides und steht senkrecht auf dem durch  $A$  gehenden zweischaligen Hyperboloide.

Der früher mit  $B$  bezeichnete Punkt mit den elliptischen Koordinaten  $\lambda_1 + d\lambda_1, \lambda_2 + d\lambda_2, \lambda_3 + d\lambda_3$  ist die  $A$  vis à vis liegende Ecke des unendlich kleinen Parallelepipeds, von dem  $AB_1, AB_2$  und  $AB_3$  die drei in  $A$  zusammenstoßenden Kanten sind.  $ds$  ist die  $A$  und  $B$  verbindende Diagonale dieses Parallelepipeds.

Während wir in Formel 334) unter  $ds$  immer die positive Quadratwurzel aus  $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$  verstehen, sollen in den Formeln 339), 340) und 341)  $A_1, A_2$  und  $A_3$  wesentlich positive Größen sein, so daß also  $ds_1$  dasselbe Vorzeichen wie  $d\lambda_1$ ,  $ds_2$  dasselbe wie  $d\lambda_2$  und  $ds_3$  dasselbe wie  $d\lambda_3$  erhalten soll.

#### § 64. Rektifikation der Krümmungslinien des Ellipsoides, Komplanatation des Ellipsoides.

Einem bestimmten konstanten  $\lambda_3$  entspricht ein bestimmtes dreiaxsiges Ellipsoid. Alle einschaligen Hyperboloide, welche wir erhalten, wenn wir dem  $\lambda_2$  alle Werte von  $-a_2^2$  bis  $-a_1^2$  erteilen, durchschneiden dasselbe in einer Kurvenschar, welche wir die Krümmungslinie erster Gattung des betreffenden Ellipsoides nennen. Ihre Tangenten zu jedem Punkte fallen nämlich, wie in der analytischen Geometrie gezeigt wird, in die Richtung einer durch diesen Punkt gezogenen Hauptkrümmungsebene. Diese Krümmungslinien beginnen für  $\lambda_2 = -a_3$  mit der Ellipse, in welcher die  $x_1 x_2$ -Ebene das Ellipsoid durchschneidet und enden für  $\lambda_2 = -a_2^2$  in den beiden Stücken der Durch-

schnittslinie des Ellipsoides und desjenigen Theiles der  $x_1 x_3$ -Ebene, welcher zwischen den beiden Ästen der Hyperbel liegt, der die Gleichungen 320) zukommen. In Fig. 9 ist die obere der positiven  $x_3$ -Achse zugewendete Hälfte des Ellipsoides von oben, also von dorthier betrachtet, wohin die kleinste Halbachse zeigt, perspektivisch gezeichnet. Die ausgezogenen Linien sind Krümmungslinien erster Gattung.

Ertheilen wir dagegen in der Gleichung 312) dem  $\lambda_1$  alle Werte zwischen  $-a_1^2$  und  $+a_1^2$ , so erhalten wir die Gleichungen einer Schar zweifächeriger Hyperboloide, welche das Ellipsoid in einer zweiten Kurvenschar, den Krümmungslinien zweiter Gattung durchschneiden. Letztere sind in Fig. 9 punktiert.

Wenn wir die Formel für die Länge der Krümmungslinien eines beliebigen Ellipsoides finden wollen, so genügt es vollständig, dieselbe für das Ellipsoid zu suchen, welches dem Werte  $\lambda_3 = 0$  entspricht; denn dieses Ellipsoid hat die Gleichung

$$342) \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1.$$

Da aber die Konstanten  $a_1, a_2, a_3$  ganz willkürlich sind, so können wir sie immer gleich den Halbachsen des gegebenen Ellipsoides machen, um dessen Krümmungslinien es sich handelt.

Die beiden Gleichungen einer Krümmungslinie erster Gattung dieses Ellipsoides finden wir, wenn wir nebst  $\lambda_3 = 0$  noch  $\lambda_2$  gleich irgend einer zwischen  $-a_2^2$  und  $+a_2^2$  liegenden Konstanten setzen. Das Linienelement einer solchen Krümmungslinie ist also zu bilden, indem wir in Formel 334)  $\lambda_3 = 0, \lambda_2 = \text{konst.}$  setzen und  $\lambda_1$  und  $d\lambda_1$  wachsen lassen. Es ist also nach Formel 341) dieses Linienelement

$$ds_1 = \frac{1}{2} A_1 d\lambda_1.$$

Ein endliches Stück der Krümmungslinie ist

$$\frac{1}{2} \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_1^1} A_1 d\lambda_1,$$

wobei  $\lambda_1^0$  und  $\lambda_1^1$  die dem Anfangspunkte und Endpunkte des Stückes entsprechenden Werte von  $\lambda_1$  sind. Den vierten



Teil  $CD$  (Fig. 9) einer Krümmungslinie erhalten wir, wenn wir die untere Grenze  $\lambda_1^0$  des Integrales gleich  $-a_1^2$ , die obere  $\lambda_1^1$  gleich  $-a_2^2$  setzen.

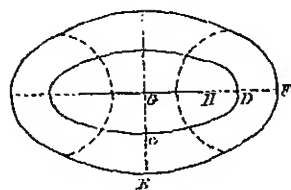


Fig. 9.

Die Länge der ganzen, in sich geschlossenen Krümmungslinie ist das Vierfache dieses bestimmten Integrales. Den hier zu substituierenden Wert von  $A_1$  erhalten wir, wenn wir in Formel 335)  $\lambda_3 = 0$  und  $\lambda_2$  gleich

der vorgeschriebenen Konstanten setzen. Es ist also in allediesem Integralen zu setzen

$$A_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}{(a_1^2 + \lambda_1)(a_2^2 + \lambda_1)(a_3^2 + \lambda_1)}}$$

worin also alles bis auf die Integrationsvariable  $\lambda_1$  konstant ist; die Integrale sind also Abelsche Integrale.

Ebenso ist die ganze Länge einer geschlossenen Krümmungslinie zweiter Gattung

$$2 \int_{a_3^2}^{a_1^2} d\lambda_2 \sqrt{\frac{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}{(a_1^2 + \lambda_2)(a_2^2 + \lambda_2)(a_3^2 + \lambda_2)}}$$

Wir gelangen in der nachfolgenden Weise zur Komplanation des Ellipsoides.

Wir ziehen vom Punkte  $A$  mit den elliptischen Koordinaten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  des Ellipsoides, für welches  $\lambda_3 = 0$  ist, aus das Linienelement  $ds_1 = \frac{1}{2} A_1 d\lambda_1 = AB_1$  der durch  $A$  hindurch gehenden Krümmungslinie erster Gattung des Ellipsoides und das Linienelement  $ds_2 = \frac{1}{2} A_2 d\lambda_2 = AB_2$  der durch ihn hindurchgehenden Krümmungslinie zweiter Gattung des Ellipsoides. Ferner ziehen wir von  $B_2$  aus auf dem Ellipsoide die unendlich kleine Gerade  $B_2C \parallel AB_1$  und von  $B_1$  aus die unendlich kleine Gerade  $B_1C \parallel AB_2$ . Die beiden zuletzt gezogenen Geraden sollen sich im Punkte  $C$  treffen. Dann kann die Figur  $AB_1CB_2A$  als ein unendlich kleines Rechteck vom Flächeninhalte  $\frac{1}{4} A_1 A_2 d\lambda_1 d\lambda_2$  und zugleich als ein Element der Oberfläche

des Ellipsoides betrachtet werden, für welches  $\lambda_3 = 0$  ist. Ein endliches Stück der Oberfläche dieses Ellipsoides ist also:

$$343) \quad F = \frac{1}{4} \iint A_1 A_2 d\lambda_1 d\lambda_2,$$

wobei alle Wertopaare von  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  in die Integration einzubegreifen sind, welche Punkten dieses Flächenstückes entsprechen.

Integriert man bei irgend einem gegebenen  $\lambda_2$  bezüglich  $\lambda_1$  von  $-a_2^2$  bis  $-a_1^2$ , so umfaßt man einen ganzen Quadranten  $CD$  (Fig. 9) einer Krümmungslinie erster Gattung. Integriert man noch bezüglich  $\lambda_3$  von  $-a_3^2$  bis  $-a_2^2$ , so umfaßt man noch alle Quadranten der Krümmungslinien erster Gattung von  $EF$  bis  $GH$ , also einen Oktanten des ganzen Ellipsoides. Es hat also die ganze geschlossene Oberfläche des Ellipsoides, dessen Gleichung  $\lambda_3 = 0$  ist, welches also die Gleichung 342) hat, den Wert:

$$2 \int_{-a_3^2}^{-a_2^2} \int_{-a_2^2}^{-a_1^2} A_1 A_2 d\lambda_1 d\lambda_2.$$

Setzen wir

$$344) \quad (a_1^2 + \lambda_1)(a_2^2 + \lambda_1)(a_3^2 + \lambda_1) = b_1^2,$$

dagegen

$$345) \quad (a_1^2 + \lambda_2)(a_3^2 + \lambda_2)(a_2^2 + \lambda_2) = -b_2^2,$$

so sind vermöge der Grenzen, zwischen denen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  liegen müssen,  $b_1^2$  und  $b_2^2$  wesentlich positive Größen. In den zuletzt entwickelten Integralen ist  $\lambda_3 = 0$ , daher

$$346) \quad A_1 = \frac{1}{b_1} \sqrt{-\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{b_2} \sqrt{-\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

Die Vorzeichen wurden in dieser Weise geschrieben, da  $-\lambda_1$ ,  $-\lambda_2$  und  $\lambda_2 - \lambda_1$  lauter positive Größen sind. Es verwandelt sich daher das Integral 343) zunächst in

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4} \iint \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{b_1 b_2} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} d\lambda_1 d\lambda_2 = \\ &= \frac{1}{4} \iint \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2^3}}{b_1 b_2} d\lambda_1 d\lambda_2 - \frac{1}{4} \iint \frac{\sqrt{\lambda_1^3 \lambda_2}}{b_1 b_2} d\lambda_1 d\lambda_2. \end{aligned}$$

Da  $b_1$  nur Funktion von  $\lambda_1$ ,  $b_2$  nur Funktion von  $\lambda_2$  ist, so zerfällt jedes Doppelintegral in das Produkt zweier einfacher Integrale und man hat

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4} \int \frac{\sqrt{\lambda_1}}{b_1} d\lambda_1 \int \frac{\sqrt{\lambda_2}}{b_2} d\lambda_2, \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{\sqrt{\lambda_1}}{b_1} d\lambda_1 \int \frac{\sqrt{\lambda_2}}{b_2} d\lambda_2. \end{aligned}$$

Erinnert man sich an die Werte von  $b_1$  und  $b_2$ , so sieht man, daß jedes der Integrale ein elliptisches und für das Rotationsellipsoid, wo entweder  $a_1 = a_3$  oder  $a_2 = a_3$  ist, durch gewöhnliche zyklometrische Funktionen ausdrückbar ist. Die ganze geschlossene Oberfläche des Ellipsoids erhält man natürlich, wenn man mit 8 multipliziert und  $-a_1^2$  und  $-a_2^2$  als Integrationsgrenzen für  $\lambda_1$ , dagegen  $-a_3^2$  und  $-a_2^2$  als Integrationsgrenzen für  $\lambda_2$  wählt.

#### § 65. Kürzeste Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoide.

Wir wollen nun die spezielle Form entwickeln, welche die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung im Falle der Bewegung eines einzigen vollkommen freien materiellen Punktes von der Masse  $m$  annimmt, wenn wir dessen Position im Raume durch die drei elliptischen Koordinaten  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  bestimmen, welche also jetzt die Rolle der früher mit  $p, p_h \dots p_s$  bezeichneten generalisierten Koordinaten spielen.

Seien  $x_1, x_2, x_3$  die rechtwinkligen Koordinaten des materiellen Punktes zur Zeit  $t$ . Während einer unendlich kleinen Zeit  $dt$  sollen dieselben die Zuwächse  $dx_1, dx_2, dx_3$  erfahren, während die dazu gehörigen Zuwächse der elliptischen Koordinaten  $d\lambda_1, d\lambda_2, d\lambda_3$  heißen mögen. Wir setzen wie in Formel 334)

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2},$$

so daß  $ds$  der während der Zeit  $dt$  zurückgelegte Weg,  $ds/dt$  die Geschwindigkeit  $v$  des materiellen Punktes zur Zeit  $t$  und

$$T = \frac{m}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2$$

dessen lebendige Kraft ist. Da die Formel 334) für beliebige Koordinatenzuwächse gilt, so muß sie auch für die während der Zeit  $dt$  eintretenden Koordinatenzuwächse gelten. Man hat also:

$$ds = \frac{1}{2} \sqrt{A_1^2 d\lambda_1^2 + A_2^2 d\lambda_2^2 + A_3^2 d\lambda_3^2},$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} \sqrt{A_1^2 \lambda_1'^2 + A_2^2 \lambda_2'^2 + A_3^2 \lambda_3'^2},$$

wobei  $\lambda_1'$ ,  $\lambda_2'$ ,  $\lambda_3'$  abgekürzte Bezeichnungen für die Differentialquotienten der  $\lambda$  nach der Zeit sind. Endlich wird

$$T = \frac{m}{8} (A_1^2 \lambda_1'^2 + A_2^2 \lambda_2'^2 + A_3^2 \lambda_3'^2).$$

Unser Rezept ging nun dahin, daß man zuerst in dem Ausdrucke für  $T$  die Momente  $q$  einzuführen, dann  $\partial W / \partial p_h$  für  $q_h$  zu setzen und den so erhaltenen Wert von  $T$  in die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t} + T + V = 0$$

zu substituieren habe. Unter den Momenten verstehen wir die partiellen Differentialquotienten des  $T$  nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten, also nach  $\lambda_1'$ ,  $\lambda_2'$  und  $\lambda_3'$ . Es ist also:

$$q_1 = \frac{\partial T}{\partial \lambda_1'} = \frac{1}{4} m A_1^2 \lambda_1',$$

$$q_2 = \frac{\partial T}{\partial \lambda_2'} = \frac{1}{4} m A_2^2 \lambda_2',$$

$$q_3 = \frac{\partial T}{\partial \lambda_3'} = \frac{1}{4} m A_3^2 \lambda_3'.$$

Daher:

$$T = \frac{2}{m} \left( \frac{q_1^2}{A_1^2} + \frac{q_2^2}{A_2^2} + \frac{q_3^2}{A_3^2} \right).$$

Hier haben wir noch für  $q_1$  zu substituieren  $\partial W / \partial p_1$ , also in unserem Falle  $\partial W / \partial \lambda_1$ , ebenso für  $q_2$  und  $q_3$  die Ausdrücke  $\partial W / \partial \lambda_2$  und  $\partial W / \partial \lambda_3$ . Tun wir dies und substituieren den so erhaltenen Wert von  $T$  in die Hamil-

touische partielle Differentialgleichung, so folgt also schließlich:

$$347) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{2}{m} \left[ \frac{1}{A_1^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} \right)^2 + \frac{1}{A_2^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} \right)^2 + \frac{1}{A_3^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} \right)^2 \right] + V = 0,$$

wobei  $V$  als eine gegebene Funktion der Koordinaten  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  und etwa noch der Zeit  $t$  zu betrachten ist. Haben wir ein vollständiges Integral, also einen Wert von  $W$  gefunden, welcher dieser Differentialgleichung genügt und außer der additiv zu  $W$  hinzukommenden noch drei willkürlich voneinander unabhängige Konstanten enthält, so können wir daraus in der uns bekannten Weise die Bewegungsgleichungen herleiten.

Wir betrachten ein zweites mechanisches Beispiel. Ein materieller Punkt soll gezwungen sein, bei seiner Bewegung auf der Oberfläche eines dreiaxigen Ellipsoids zu verbleiben. Wir können die dem elliptischen Koordinatensysteme zugrunde liegenden Konstanten  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  gleich den Halbachsen dieses Ellipsoids wählen. Dann ist  $\lambda_3 = 0$  die Gleichung dieses Ellipsoids, welche also der materielle Punkt während seiner ganzen Bewegung erfüllen muß. Seine Position auf dem Ellipsoid wird durch die Werte der beiden anderen elliptischen Koordinaten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  bestimmt. Da  $\lambda_3$  konstant gleich Null ist, so reduziert  $4ds^2$  auf  $A_2^2 d\lambda_2^2 + A_1^2 d\lambda_1^2$ , daher  $T$  auf  $\frac{m}{8} (A_2^2 \dot{\lambda}_2^2 + A_1^2 \dot{\lambda}_1^2)$  und die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung auf:

$$348) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{2}{m} \left[ \frac{1}{A_1^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} \right)^2 + \frac{1}{A_2^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} \right)^2 \right] + V = 0.$$

Falls außer den Kräften, welche den Punkt zwingen, auf dem Ellipsoide zu bleiben, keine anderen Kräfte auf ihn wirken, ist  $V$  konstant. Setzen wir dann

$$349) \quad W = - \left( \frac{2a_1}{m} + V \right) t + U,$$

wobei  $U$  bloß Funktion von  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sein soll und dem konstanten Faktor von  $t$  lediglich behufs Vereinfachung der Rechnung diese spezielle Form gegeben wurde, so reduziert sich die Gleichung 348) auf

$$350) \quad \alpha_1 = \frac{1}{A_1^2} \left( \frac{\partial U}{\partial \lambda_1} \right)^2 + \frac{1}{A_2^2} \left( \frac{\partial U}{\partial \lambda_2} \right)^2.$$

Da  $\lambda_3 = 0$  ist, so nehmen  $A_1$  und  $A_2$  wieder die Werte 346) an. Setzen wir außerdem noch  $U = U_1 + U_2$ , wobei  $U_1$  bloß Funktion von  $\lambda_1$ ,  $U_2$  bloß Funktion von  $\lambda_2$  ist, so reduzieren sich die partiellen Differentialquotienten auf gewöhnliche und die Gleichung 350) verwandelt sich in

$$351) \quad \frac{b_1^2}{\lambda_1} \left( \frac{d U_1}{d \lambda_1} \right)^2 + \frac{b_2^2}{\lambda_2} \left( \frac{d U_2}{d \lambda_2} \right)^2 = \alpha_1 \lambda_1 - \alpha_2 \lambda_2.$$

Wir erfüllen diese Gleichung, wenn wir setzen

$$\frac{b_1^2}{\lambda_1} \left( \frac{d U_1}{d \lambda_1} \right)^2 = + \alpha_1 \lambda_1 - \alpha_2,$$

$$\frac{b_2^2}{\lambda_2} \left( \frac{d U_2}{d \lambda_2} \right)^2 = + \alpha_2 - \alpha_1 \lambda_2.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, da  $b_1$  bloß Funktion von  $\lambda_1$  und  $b_2$  bloß Funktion von  $\lambda_2$  ist

$$U_1 = \int \frac{\sqrt{\alpha_1 \lambda_1^2 - \alpha_2 \lambda_1}}{b_1} d \lambda_1,$$

$$U_2 = \int \frac{d \lambda_2 \sqrt{\alpha_2 \lambda_2 - \alpha_1 \lambda_2^2}}{b_2},$$

daher

$$352) \quad \left\{ \begin{aligned} W = & - \left( \frac{2 \alpha_1}{m} + V \right) t + \int \frac{\sqrt{\alpha_1 \lambda_1^2 - \alpha_2 \lambda_1}}{b_1} d \lambda_1 + \\ & + \int \frac{\sqrt{\alpha_2 \lambda_2 - \alpha_1 \lambda_2^2}}{b_2} d \lambda_2. \end{aligned} \right.$$

Alle die Substitutionen, welche wir da machten, waren erlaubt, da es sich bei Ableitung der Bewegungsgleichungen aus der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung, wie wir wissen, bloß darum handelt, ein vollständiges Integral derselben zu finden, d. h. einen Ausdruck für  $W$ , welcher ihr genügt und die nötige Anzahl unabhängiger willkürlicher Konstanten hat. Der Ausdruck 352) aber ist ein solches vollständiges Integral, da er außer der additiv hinzukommenden Konstanten noch die zwei willkürlichen voneinander unabhängigen Konstanten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  enthält

Setzt man seine partiellen Differentialquotienten nach der einen und nach der anderen Konstante gleich einer dritten resp. vierten willkürlichen Konstanten, so erhält man die beiden Bewegungsgleichungen. Da der partielle Differentialquotient von  $W$  nach  $\alpha_2$  die Zeit nicht enthält, so liefert er, gleich einer Konstanten  $-\alpha_3/2$  gesetzt, die Gleichung der Bahn. Man erhält also für dieselbe

$$353) \quad \int \frac{\sqrt{\lambda_2} d\lambda_2}{b_2 \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 \lambda_2}} - \int \frac{\sqrt{\lambda_1} d\lambda_1}{b_1 \sqrt{\alpha_1 \lambda_1 - \alpha_2}} = \alpha_3,$$

wobei man sich für  $b_2$  und  $b_3$  die Worte 344) und 345) substituiert zu denken hat, so daß also die Integrale ultrae elliptische, für das Rotationsellipsoid elliptische worden.

Diese Gleichung enthält in Wirklichkeit nur zwei willkürliche Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2^2$  und  $\alpha_2, \alpha_3^2$ , welche so bestimmt werden können, daß die Koordinaten des gegebenen Ausgangspunktes des materiellen Punktes diese Gleichung befriedigen und daß im Ausgangspunkte die Richtung der durch diese Gleichung dargestellten Kurve die gegebene Bewegungsrichtung des materiellen Punktes hat.

Läßt man auf einer Kugelfläche von einem Punkte  $A$  aus nach allen darauf möglichen Richtungen materielle Punkte ausgehen, auf welche sonst keine Kräfte wirken, als diejenigen, welche sie zwingen, auf der Kugelfläche zu bleiben, so beschreiben alle diese materiellen Punkte größte Kreise, welche sich in dem  $A$  vis à vis liegenden Punkte  $B$  der Kugelfläche wieder treffen. Das zwischen  $A$  und irgend einem anderen Punkte  $A_1$  eines solchen größten Kreises liegendes Stück  $AA_1$  des größten Kreises ist so lange die absolut kürzeste Linie, die man auf der Kugelfläche von  $A$  nach  $A_1$  ziehen kann, als der Punkt  $B$  nicht auf dem Stücke  $AA_1$  zwischen  $A$  und  $A_1$  liegt. Im letzteren Falle, wenn also der materielle Punkt auf dem Wege von  $A$  nach  $A_1$  den Punkt  $B$  überschritten hat, ist der größte Kreisbogen  $ABA_1$  nicht mehr die absolut kürzeste, auf der Kugel liegende Verbindungslinie der Punkte  $A$  und  $A_1$ , aber er ist noch ein Grenzwert, d. h. die Länge jeder anderen ihm unendlich nahen Verbindungslinie  $ACA_1$  der Punkte  $A$  und  $A_1$

auf der Kugel ist von der Länge des größten Kreisbogens  $ABA_1$  um eine Größe verschieden, die unendlich klein höherer Ordnung ist, als der durchschnittliche Abstand irgend eines Punktes des größten Kreisbogens von dem ihm zunächst liegenden Punkte der Kurve  $ACA_1$ .

Wenn man nun von irgend einem Punkte  $A$  auf der Fläche eines dreiaxigen Ellipsoides in gleicher Weise nach allen Richtungen darauf materielle Punkte aussendet, auf welche sonst keine Kraft wirkt, als diejenige, welche sie zwingt, auf der Ellipsoidfläche zu bleiben, so schneiden sich alle Bahnen dieser Punkte, deren Gleichungen alle die Form der Gleichung 353) haben, nicht mehr nochmals in einem und demselben Punkte, sondern sie haben vis à vis vom Ausgangspunkte eine einhüllende, die sich nur dann auf den vis à vis von  $A$  liegenden Punkt reduziert, wenn  $A$  auf einer der Achsen des Ellipsoides liegt. Das Stück jeder solchen Bahn, das zwischen  $A$  und irgend einem andern Punkte  $A_1$  der Bahn auf dem Ellipsoide liegt, ist so lange die absolut kürzeste Linie, die man auf dem Ellipsoide zwischen  $A$  und  $A_1$  ziehen kann, als beim Übergange von  $A$  nach  $A_1$  kein Berührungspunkt mit jener einhüllenden durchlaufen wird. Im letzteren Falle ist es noch immer ein Grenzwert, da, wie wir in § 39 aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung bewiesen, die Bahn eines von keinen Kräften affizierten materiellen Punktes auf einer krummen Fläche immer ein Grenzwert sein muß. Es ist aber üblich, diese Bahn ohne weitere Erläuterung als eine kürzeste Linie auf der betreffenden Fläche zu bezeichnen und deshalb nennen wir auch alle durch die Gleichung 353) dargestellten Kurven kürzeste, loxodrome oder auch geodätische Kurven. Man sucht nämlich zu Schiff im allgemeinen in einer kürzesten Linie von der Ausgangs- zur Endstation zu steuern und in der Geodäsie wird die Entfernung zweier Orte der Erdoberfläche längs der kürzesten Linien gemessen.

Die Abhängigkeit der Lage des betrachteten materiellen Punktes auf dem Ellipsoide von der Zeit erhält man, wenn man den partiellen Differentialquotienten, der durch die



Gleichung 352) gegebenen Größe  $W$  nach  $\alpha_1$  gleich einer neuen Konstanten  $-\frac{\alpha_1}{2}$  setzt. Dadurch ergibt sich:

$$\int \frac{\sqrt{\lambda_2^2 d\lambda_2}}{b_2 \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 \lambda_2}} - \int \frac{\sqrt{\lambda_1^2 d\lambda_1}}{b_1 \sqrt{\alpha_1 \lambda_1 - \alpha_2}} = \alpha_1 - \frac{4}{m}.$$

Daraus folgt:

$$354) \quad \frac{\sqrt{\lambda_2^2 \lambda_2'}}{b_2 \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 \lambda_2}} - \frac{\sqrt{\lambda_1^2 \lambda_1'}}{b_1 \sqrt{\alpha_1 \lambda_1 - \alpha_2}} = -\frac{4}{m},$$

während die Differentiation der Gleichung 353) liefert:

$$355) \quad \frac{\sqrt{\lambda_2^2 \lambda_2'}}{b_2 \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 \lambda_2}} - \frac{\sqrt{\lambda_1^2 \lambda_1'}}{b_1 \sqrt{\alpha_1 \lambda_1 - \alpha_2}} = 0,$$

woraus durch Quadrierung folgt:

$$356) \quad \frac{\lambda_2^2 \lambda_2'^2}{b_2^2 (\alpha_2 - \alpha_1 \lambda_2)} - \frac{\lambda_1^2 \lambda_1'^2}{b_1^2 (\alpha_1 \lambda_1 - \alpha_2)} = 0.$$

Multiplizieren wir das Quadrat der Gleichung 354) mit  $\alpha_1$ , addieren dazu das mit  $-\alpha_1 \lambda_1 \lambda_2$  multiplizierte Quadrat der Gleichung 355) und die mit  $\alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2)$  multiplizierte Gleichung 356), so ergibt sich mit Rücksicht auf die Definition der Größen  $A$  durch die Gleichungen 346)

$$A_2^2 \lambda_2'^2 + A_1^2 \lambda_1'^2 = \frac{16\alpha_1}{m^2}.$$

Es ist also  $4\alpha_1$  das Quadrat des Bewegungsmomentes, also gleich  $m^2 c^2$ .

Die Geschwindigkeit  $c$  umgekehrt ist  $2\sqrt{\alpha_1}/m$ , also während der ganzen Bewegung konstant, wie es nicht anders zu erwarten war. Der während der Zeit  $t$  zurückgelegte Bogen  $s$  der loxodromen Kurve ist also gleich  $ct$  und man erhält, wenn man in die Gleichung 353)  $s/c$  statt  $t$  schreibt, die Rektifikation der Krümmungslinien des dreiaxigen Ellipsoides.

### § 66. Ein spezieller Fall des Dreikörperproblems.

Wir wollen nun die Bewegung eines materiellen Punktes von der Masse  $m$  betrachten, welcher von zwei fixen Zentren  $P$  und  $P'$  angezogen wird und zwar von jedem nach

dem Newtonschen Gravitationsgesetze. Wir bezeichnen die Länge der Geraden  $PP'$  mit  $2c$ , ihren Halbierungspunkt mit  $O$  und betrachten zuerst den speziellen Fall, daß die Anfangsgeschwindigkeit zu Anfang der Zeit in der Ebene liegt, die man durch  $P, P'$  und die Anfangslage des materiellen Punktes legen kann. Der Punkt bleibt dann immer in dieser Ebene.

Wir wählen den soeben mit  $O$  bezeichneten Punkt zum Koordinatenursprunge und ziehen die Abszissenachse  $OX_2$  so, daß der Punkt  $P$  auf der positiven Abszissenachse, der Punkt  $P'$  auf der negativen Abszissenachse liegt, die Ordinatenachse  $OX_3$  darauf senkrecht in der Ebene der Bahn, die Achse  $OX_1$  senkrecht auf die Bahnebene. Der materielle Punkt befinde sich zur Zeit  $t$  im Punkte  $A$ , dessen rechtwinklige Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  seien. Es ist dann  $x_1 = 0$ . Wir konstruieren ferner ein elliptisches Koordinatensystem. Die Konstanten  $a_1$  und  $a_2$  desselben sind willkürlich,  $a_3$  soll jedoch so gewählt werden, daß

$$357) \quad a_1^2 - a_2^2 = c^2$$

ist, daß also  $P$  und  $P'$  die Brennpunkte der Ellipsen und Hyperbeln sind, in denen die konfokalen Flächen zweiten Grades, welche die elliptischen Koordinaten definieren, von der  $x_2 x_3$ -Ebene geschnitten werden. Die betreffenden elliptischen Koordinaten des Punktes  $A$  seien  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Da für diesen Punkt  $x_1 = 0$  ist, so ist auch  $\lambda_1 = -a_1^2$ . Die beiden zweischaligen Hyperboloide degenerieren in die  $x_2 x_3$ -Ebene. Die Relationen zwischen  $x_2, x_3$  und  $\lambda_2, \lambda_3$  finden wir, wenn wir in den Gleichungen 330), 331) und 332) setzen  $\lambda_1 = -a_1^2$ , wodurch wir wegen Gleichung 357) erhalten:

$$c^2 x_2^2 = (a_2^2 + \lambda_2)(a_2^2 - \lambda_2),$$

$$c^2 x_3^2 = -(a_3^2 + \lambda_2)(a_3^2 - \lambda_2).$$

Die Addition dieser Gleichungen liefert:

$$x_2^2 + x_3^2 = a_2^2 + a_3^2 - \lambda_2 - \lambda_3,$$

daher

$$x_2^2 + x_3^2 + c^2 = 2a_2^2 - \lambda_2 - \lambda_3 = w_2^2 + w_3^2,$$

wenn wir

$$w_2 = \sqrt{a_2^2 + \lambda_2}, \quad w_3 = \sqrt{a_3^2 + \lambda_3}$$

setzen, wobei die Wurzeln immer mit positivem Zeichen zu nehmen sind.

Bezeichnen wir die Abstände  $AP$  und  $AP'$  mit  $r$  und  $r'$ , so ist

$$358) \quad \begin{cases} r = \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + c^2 - 2cx_2} = w_3 - w_2 \\ r' = \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + c^2 + 2cx_2} = w_3 + w_2 \end{cases}$$

Die Vorzeichen sind richtig, da  $r, r', w_1$  und  $w_2$  positiv und mit Berücksichtigung des Vorzeichens  $\lambda_3 > \lambda_2$ , daher auch  $w_3 > w_2$  ist. Wenn  $k$  und  $k'$  Konstanten sind, so ist die Kraftfunktion in diesem Falle:

$$V = -\frac{k}{r} - \frac{k'}{r'} = \frac{k(w_3 - w_2) - k'(w_3 + w_2)}{w_3^2 - w_2^2} = \frac{(k' - k)w_3 - (k + k')w_2}{\lambda_3 - \lambda_2},$$

die lebendige Kraft ist

$$T = \frac{m}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{m}{8} (A_2^2 \lambda_2' + A_3^2 \lambda_3') = \frac{2}{m} \left( \frac{q_2^2}{A_2^2} + \frac{q_3^2}{A_3^2} \right).$$

$A_2$  und  $A_3$  erhält man, indem man wieder in den Formeln 335) setzt  $\lambda_1 = -a_1^2$ , wodurch folgt:

$$A_2^2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{(a_2^2 + \lambda_2)(a_3^2 + \lambda_2)}, \quad A_3^2 = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{(a_2^2 + \lambda_3)(a_3^2 + \lambda_3)}.$$

Ferner ist statt  $q_2$  und  $q_3$  zu setzen  $\partial W / \partial \lambda_2$  und  $\partial W / \partial \lambda_3$ . Es wird also

$$T = \frac{2}{m(\lambda_1 - \lambda_3)} \left[ (a_2^2 + \lambda_3)(a_3^2 + \lambda_2) \left( \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} \right)^2 - (a_2^2 + \lambda_2)(a_3^2 + \lambda_3) \left( \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} \right)^2 \right].$$

Bevor wir dies in die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung 301) substituieren, wollen wir für  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  die Variablen  $w_2$  und  $w_3$  einführen. Ferner wollen wir noch setzen:

$$359) \quad W = \alpha_1 t + W_2 + W_3,$$

wobei  $W_2$  nur Funktion von  $\lambda_2$  oder  $w_2$ ,  $W_3$  nun Funktion von  $\lambda_3$  oder  $w_3$  sein soll. Es wird

$$2m\alpha_1(w_1^2 - w_2^2) + (e^2 - w_2^2)\left(\frac{dW_2}{dw_2}\right)^2 + (w_3^2 - e^2)\left(\frac{dW_3}{dw_3}\right)^2 + \\ + 2m(k' - k)w_1 - 2m(k + k')w_3 = 0$$

und man kann setzen

$$(w_2^2 - e^2)\left(\frac{dW_2}{dw_2}\right)^2 = \alpha_2 + 2m(k' - k)w_1 - 2m\alpha_1 w_1^2$$

$$(w_3^2 - e^2)\left(\frac{dW_3}{dw_3}\right)^2 = -\alpha_2 + 2m(k + k')w_3 - 2m\alpha_1 w_3^2.$$

Die durch diese Gleichungen definierten Funktionen  $W_2$  und  $W_3$  sind elliptische und zwar erscheint  $W_2$  zunächst als Funktion von  $w_2$ ,  $W_3$  als Funktion von  $w_3$ ; beide können daher vermöge der Gleichungen 358) auch leicht als Funktionen von  $r$  und  $r'$  ausgedrückt werden. Die Substitution in Gleichung 359) liefert zunächst  $W$ . Dessen nach  $\alpha_2$  genommener partieller Differentialquotient liefert gleich einer neuen Konstanten gesetzt die Gleichung der Bahn, wogegen man den zeitlichen Verlauf der Bewegung erhält, wenn man den partiellen Differentialquotienten von  $W$  nach  $\alpha_1$  gleich einer abermals neuen Konstanten setzt.

Wir wollen nun wieder die Bewegung eines materiellen Punktes von der Masse  $m$ , der gegen zwei fixe Anziehungszentra  $P$  und  $P'$  mit der Kraft  $k/r^2$  resp.  $k'/r'^2$  gezogen wird, betrachten, wobei wieder  $r$  und  $r'$  die Entfernungen des materiellen Punktes zur Zeit  $t$  von  $P$  resp.  $P'$  sind. Es soll aber die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit des materiellen Punktes nicht in der durch seine Anfangslage und  $P$  und  $P'$  hindurchgehenden Ebene liegen.

Wir wählen wieder den Halbierungspunkt der Geraden  $PP'$ , deren Länge wir mit  $2a$  bezeichnen, zum Koordinatenursprunge, ziehen von  $O$  gegen  $P$  die positive Abszissenachse  $OX_2$ , außerdem ziehen wir aber noch zwei beliebige fixe Koordinatenachsen  $OY$  und  $OZ$  auf  $OX_2$  senkrecht im Raume. Zudem wenden wir noch eine bewegliche Ordinatenachse  $OX_3$  an, welche stets senkrecht zu  $OX_2$  immer in der durch  $OX_2$  und die augenblickliche Lage  $A$  des materiellen Punktes  $m$  gehenden Ebene  $X_2 O X_3$  liegen soll.

Die Koordinaten des Punktes  $A$  bezüglich des beweglichen Koordinatensystemes  $OX_2$  und  $OX_3$  sollen mit  $x_2$  und  $x_3$  bezeichnet werden. Der veränderliche Winkel zwischen den Geraden  $OX_2$  und  $OY$ , also zwischen der fixen  $xy$ -Ebene  $X_2 OY$  und der beweglichen  $xy$ -Ebene  $X_2 OX_3$  soll mit  $\vartheta$  bezeichnet werden. Dieser Winkel bestimmt die Lage der beweglichen  $xy$ -Ebene, während  $x_2$  und  $x_3$  die Lage des Punktes  $A$  auf derselben bestimmen. Durch die drei Variablen  $x_2$ ,  $x_3$  und  $\vartheta$  wird also die augenblickliche Lage  $A$  des materiellen Punktes im Raume eindeutig bestimmt.

Das Verhältnis der Variablen  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  zu  $x_2$ ,  $x_3$  drückte in der eben gelösten Aufgabe eine rein geometrische Beziehung aus, welche bloß auf die Lage in der  $x_2 x_3$ -Ebene Bezug hat und ganz davon unabhängig ist, ob diese Ebene fix ist oder sich bewegt. Die geometrische Lage des Punktes  $A$  auf der  $X_2 OX_3$ -Ebene ist aber jetzt genau dieselbe, wie früher, als sich der materielle Punkt in einer Ebene bewegte. Wir können also jetzt wie damals die Variablen  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  statt  $x_2$  und  $x_3$  einführen. Es werden alle Gleichungen zwischen diesen vier Variablen, welche sich auf die geometrische Lage des Punktes  $A$  auf der  $X_2 OX_3$ -Ebene beziehen, vollkommen unverändert bleiben. Setzen wir wieder

$$a_2^2 + \lambda_2 = w_2^2, \quad a_3^2 + \lambda_3 = w_3^2,$$

so wird wieder

$$V = \frac{k}{r} - \frac{k'}{r'} = \frac{(k' - k)w_2 - (k' + k)w_3}{w_2^2 - w_3^2}.$$

Die Bewegung des materiellen Punktes während der Zeit  $dt$  kann in drei Komponenten zerlegt werden:

1. Es wächst  $x_2$  um  $dx_2$ . Dadurch verschiebt sich der Punkt um das Stück  $dx_2$  in der Richtung  $OX_2$ .
2. Es wächst  $x_3$  um  $dx_3$ , dadurch verschiebt sich  $A$  um das Stück  $dx_3$  in der Richtung  $OX_3$ .
3. Es wächst  $\vartheta$  um  $d\vartheta$ . Die Verschiebung, welche durch diesen Umstand allein bewirkt würde, steht senkrecht auf den beiden früheren  $dx_2$  und  $dx_3$  und kann als ein

unendlich kleiner mit dem Radius  $x_3$  beschriebener, dem Zentriwinkel  $d\vartheta$  gegenüberliegender Kreisbogen von der Länge  $x_3 d\vartheta$  betrachtet werden. Der gesamte vom materiellen Punkte während der Zeit  $dt$  beschriebene Weg ist also

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + x_3^2 d\vartheta^2}.$$

Nun bleiben aber die geometrischen Beziehungen zwischen  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $x_2$  und  $x_3$  dieselben, daher ist

$$4(dx_1^2 + dx_2^2) = A_2^2 d\lambda_2^2 + A_3^2 d\lambda_3^2$$

und wenn man wieder die Differentialquotienten nach der Zeit durch angehängte Striche markiert

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{1}{4}(A_2^2 \dot{\lambda}_2^2 + A_3^2 \dot{\lambda}_3^2) + x_3^2 \dot{\vartheta}^2},$$

daher

$$T = \frac{m}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{m}{8} (A_2^2 \dot{\lambda}_2^2 + A_3^2 \dot{\lambda}_3^2 + 4x_3^2 \dot{\vartheta}^2),$$

woraus sich die den generalisierten Koordinaten  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\vartheta$  entsprechenden Momente gleich

$$q_1 = \frac{1}{4} m A_2^2 \dot{\lambda}_2, \quad q_2 = \frac{1}{4} m A_3^2 \dot{\lambda}_3, \quad q_3 = m x_3^2 \dot{\vartheta}$$

und daher

$$T = \frac{2}{m} \left( \frac{q_1^2}{A_2^2} + \frac{q_2^2}{A_3^2} + \frac{q_3^2}{4x_3^2} \right)$$

ergibt. Ehe wir dies in die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t} + T + V = 0$$

substituieren, haben wir darin für  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  die partiellen Differentialquotienten des  $W$  nach den Koordinaten, also  $\partial W / \partial \lambda_2$ ,  $\partial W / \partial \lambda_3$  und  $\partial W / \partial \vartheta$  einzusetzen. Wir wollen für  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  die Variablen  $w_2$  und  $w_3$  einführen, erhalten also

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = \frac{1}{2w_2} \frac{\partial W}{\partial w_2}, \quad \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} = \frac{1}{2w_3} \frac{\partial W}{\partial w_3}.$$

Diese Worte nebst  $\partial W / \partial \vartheta$  sind in  $T$  für  $q_1$ ,  $q_2$  und  $q_3$  zu schreiben. Ferner ist

$$\begin{aligned}
 A_2^2 &= \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{(a_2^2 + \lambda_2)(a_3^2 + \lambda_2)} = \frac{w_2^2 - w_3^2}{w_2^2 (w_2^2 - c^2)}, \\
 A_3^2 &= \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{(a_2^2 + \lambda_3)(a_3^2 + \lambda_3)} = \frac{w_3^2 - w_2^2}{w_3^2 (w_3^2 - c^2)}, \\
 \frac{1}{x_3^2} &= -\frac{c^2}{(a_2^2 + \lambda_3)(a_3^2 + \lambda_3)} = -\frac{c^2}{(w_2^2 - c^2)(w_3^2 - c^2)} = \\
 &= \frac{c^2}{w_2^2 - w_3^2} \left( \frac{1}{w_2^2 - c^2} - \frac{1}{w_3^2 - c^2} \right).
 \end{aligned}$$

Endlich wollen wir noch setzen

$$W = \alpha_1 t + \alpha_3 \vartheta + W_2 + W_3,$$

wobei  $W_2$  nur Funktion von  $\lambda_2$  resp.  $w_2$ ,  $W_3$  nur Funktion von  $\lambda_3$  resp.  $w_3$  sein soll, so daß

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \alpha_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \vartheta} = \alpha_3, \quad \frac{\partial W}{\partial w_2} = \frac{dW_2}{dw_2}, \quad \frac{\partial W}{\partial w_3} = \frac{dW_3}{dw_3}$$

wird. Es verwandelt sich schließlich nach Multiplikation mit  $2m(w_2^2 - w_3^2)$  die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung in folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
 (w_2^2 - c^2) \left( \frac{dW_2}{dw_2} \right)^2 - (w_3^2 - c^2) \left( \frac{dW_3}{dw_3} \right)^2 + \frac{c^2 \alpha_3^2}{w_2^2 - c^2} - \frac{c^2 \alpha_3^2}{w_3^2 - c^2} + \\
 + 2m(k - k')w_2 + 2m(k' + k)w_3 + 2m\alpha_1 w_2^2 - 2m\alpha_1 w_3^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Zu dieser Gleichung addieren und subtrahieren wir eine dritte Konstante  $\alpha_2$  und spalten sie dann in die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 (w_2^2 - c^2) \left( \frac{dW_2}{dw_2} \right)^2 &= 2m(k' - k)w_2 - 2m\alpha_1 w_2^2 - \frac{c^2 \alpha_3^2}{w_2^2 - c^2} + \alpha_2, \\
 (w_3^2 - c^2) \left( \frac{dW_3}{dw_3} \right)^2 &= 2m(k + k')w_3 - 2m\alpha_1 w_3^2 - \frac{c^2 \alpha_3^2}{w_3^2 - c^2} + \alpha_2.
 \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt  $W_2$  als ultraelliptische Funktion von  $w_2$  und  $W_3$  als ebensolche Funktion von  $w_3$ . Die beiden Gleichungen der Bahn erhält man, wenn man die beiden partiellen Differentialquotienten des  $W$  nach  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  je gleich zwei neuen Konstanten  $\beta_2$  und  $\beta_3$  setzt, den zeitlichen Verlauf der Bewegung aber erhält man, indem man den partiellen Differentialquotienten des  $W$  nach  $\alpha_1$

gleich einer letzten Konstanten  $\beta_1$  setzt. Natürlich besteht die Gleichung der lebendigen Kraft und die auf die  $yz$ -Ebene bezügliche Flächenmomentengleichung, mit deren Deduktion aus unseren Schlußgleichungen ich mich aber nicht aufhalten will.

## VI. Methode der Variation der Konstanten.

### § 67. Beziehung dieser Methode zu der der Variationsrechnung der reinen Mathematik.

Schon in § 8, in dem nächsten auf Entwicklung der Gleichung 53) folgenden Abschnitte, beschäftigten wir uns mit der Idee einer fortgesetzten Variation, bis man zu einem um Endliches verschiedenen Zustande gelangt. Im IV. Abschnitte hatten wir es dann schon wiederholt mit dem Begriffe des allmählichen Überganges der rein mathematischen Variation in eine kleine, durch physikalische Ursachen bewirkte wirkliche Änderung der Bewegung zu tun. Damit ist aber Bedeutung dieses Begriffes für die theoretische Physik noch lange nicht erschöpft.

Es gibt nämlich keinen einzigen Naturvorgang, welcher sich in so einfacher Weise abspielen würde, daß er absolut exakt in Gleichungen gefaßt werden könnte. Glücklicherweise ist jedoch häufig eine der wirkenden Ursachen bei weitem die ausschlaggebendste und man kann die Bewegung, welche durch sie allein erzeugt würde, in Gleichungen fassen, welche die wirkliche Bewegung angenähert darstellen und gewisse Integrationskonstanten enthalten. Die übrigen wirkenden Ursachen werden dann als solche betrachtet, welche jene einfache Bewegung stören und die Werte der Integrationskonstanten kontinuierlich langsam verändern. Diejenige einfache Bewegung, welche eintreten würde, wenn zur Zeit  $t$  plötzlich alle Störungen aufhören würden, und welche mit denjenigen Werten der Integrations-



konstanten fortginge, welche diese bei der wirklichen Bewegung gerade zur Zeit  $t$  haben, heißt die oskulierende einfache Bewegung.

Diese Methode der Lösung komplizierter Probleme heißt die Methode der Variation der Konstanten. Ihre Durchführbarkeit beruht darauf, daß alle Ausdrücke nach Potenzen der als sehr klein betrachteten Störungen entwickelt werden und zuerst alle Potenzen mit Ausnahme der ersten vernachlässigt werden. Ist diese Rechnung durchgeführt, so können dann die Glieder zweiter Ordnung ebenfalls berücksichtigt werden u. s. f.

So ist in erster Instanz die Wirkung aller Kräfte eine Störung und die geradlinige, gleichförmige Bewegung, welche eintreten würde, wenn in einem bestimmten Momente alle Kräfte aufhören würden, die oskulierende. Ein geworfener Körper (Geschützprojektil) beschreibt in erster Annäherung die Fallparabel, die Störung durch den Luftwiderstand wird als klein betrachtet. Reibung, Mittelswiderstand, elastische Nachwirkung, elektromagnetische Dämpfung werden als kleine Störungen bei den Schwingungen von Pendeln, Magneten, bei akustischen und elektromagnetischen stehenden Schwingungen betrachtet. Die erste Anwendung und höchste Vollendung erfuhr jedoch diese Methode in der Astronomie, wo man die Bewegung jedes Planeten, Mondes oder Kometen unter dem Einflusse seines Zentralkörpers als dessen ungestörte Bahn, die Einflüsse aller übrigen Himmelskörper aber als kleine Störungen derselben betrachtet. Obwohl uns daher hier die astronomischen Aufgaben ferner liegen, so werden wir doch nicht umhin können, sie als Musterbilder für eine Rechnungsmethode, die auch in der übrigen Physik täglich häufiger in Anwendung kommt, hier in den Vordergrund zu rücken.

Die beschriebene Methode der Variation der Konstanten scheint der Idee nach grundverschieden von der in § 1 definierten und in den folgenden Paragraphen verwendeten Variationsmethode der reinen Mathematik. Praktisch sind beiden Methoden die nächsten Verwandten, da beide auf der Voraussetzung beruhen, daß die Variationen so klein sind,

daß man die Glieder erster Ordnung für sich, die zweiter davon getrennt wiederum für sich etc. betrachten darf.

Wir wollen nun die Methode der Variation der Konstanten näher folgendermaßen definieren: Es sei die Berechnung der Bewegung eines mechanischen Systems, in dem Kräfte tätig sind, die eine gewisse Kraftfunktion  $V$  haben, gelungen. Die Lösung enthalte die nötige Zahl von Integrationskonstanten. Es soll daraus, dadurch daß man statt dieser Integrationskonstanten Funktionen der Zeit substituiert, die Lösung einer anderen Aufgabe abgeleitet werden, wobei dasselbe mechanische System sich unter dem Einflusse von Kräften bewegt, welche eine etwas von  $V$  verschiedene Kraftfunktion  $V + \Omega$  haben. Wir wollen dieses Problem zunächst nach der Lagrangeschen Methode behandeln.

### § 68. Lagranges Hilfsatz.

Wir leiten vorerst eine allgemeine Relation ab. Es sei genau wie in § 55 ein beliebiges mechanisches System gegeben, das durch die generalisierten Koordinaten  $p_1, p_2 \dots p_s$  bestimmt ist. Wir setzen Einfachheit halber voraus, daß zwischen diesen keine Bedingungsgleichungen bestehen und eine Kraftfunktion  $V$  existiert, welche nur die Koordinaten und eventuell die Zeit enthält. Wir bezeichnen wie früher mit  $p'$  die Geschwindigkeiten, mit  $q$  die Momente, mit  $T$  die lebendige Kraft, welche wir bei Bildung der partiellen Differentialquotienten als homogene quadratische Funktion der Geschwindigkeiten ausgedrückt denken und setzen  $H = T - V$ . Dann lauten nach 74) und 286) die Bewegungsgleichungen:

$$360) \quad \frac{d q_h}{d t} = \frac{d}{d t} \left( \frac{\partial H}{\partial p'_h} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_h} \quad h = 1, 2 \dots s.$$

Aus diesen Bewegungsgleichungen können die Koordinaten als Funktionen von der Zeit  $t$  und  $2s$  Integrationskonstanten  $C_1, C_2 \dots C_{2s}$  gefunden werden. Wir wollen nun den Werten sämtlicher Integrationskonstanten unendlich kleine Zuwächse  $\delta C_1, \delta C_2 \dots \delta C_{2s}$  erteilen. Dadurch werden die zu irgend einer Zeit gehörigen Werte der Koordinaten,

Geschwindigkeiten, Momente sowie alle Ausdrücke, welche Funktionen dieser Größen und der Zeit sind, ebenfalls unendlich kleine Zuwächse erfahren, die wir durch ein vorgesetztes  $\delta$  bezeichnen wollen. Jeder derartige Ausdruck  $G$  kann, wie die Koordinaten, Geschwindigkeiten und Momente selbst, als Funktion von  $t, C_1, C_2 \dots C_s$  ausgedrückt werden und es ist

$$\delta G = \sum_1^{2s} \frac{\partial G}{\partial C_h} \delta C_h.$$

Die den Worten  $C + \delta C$  der Integrationskonstanten entsprechende Bewegung ist also eine spezielle variierte Bewegung im mathematischen Sinne der Variationsrechnung und wir knüpfen hier die Theorie der physikalischen nicht strengen unendlich kleinen Variationen vollständig an die der mathematischen Variationen an.

Wir wollen nun noch ein zweites Mal den Integrationskonstanten  $C_1, C_2 \dots C_s$  beliebige andere, von den  $\delta C$  vollständig unabhängige, unendlich kleine Zuwächse  $\Delta C_1, \Delta C_2 \dots \Delta C_s$  erteilen. Dann ist ebenso der dadurch erzeugte Zuwachs des zu irgend einer Zeit gehörigen Wortes von  $G$

$$\Delta G = \sum_1^{2s} \frac{\partial G}{\partial C_h} \Delta C_h.$$

Der Zuwachs, welchen  $\delta G$  erfährt, wenn man darin die  $\delta C$  und natürlich immer  $t$  unverändert, aber die  $C$  um  $\Delta C$  wachsen läßt, soll mit  $\Delta \delta G$ , der von  $\Delta G$ , wenn man bloß die  $C$  um  $\delta C$  wachsen läßt, mit  $\delta \Delta G$  bezeichnet werden. Dann ist offenbar

$$361) \quad \Delta \delta G = \delta \Delta G = \sum_1^{2s} \sum_1^{2s} \frac{\partial^2 G}{\partial C_h \partial C_k} \delta C_h \Delta C_k.$$

Lassen wir in  $\partial H / \partial p'_h$  oder  $\partial H / \partial p_h$  die  $C$  und  $\delta C$  wachsen, so erhalten wir die Größen

$$\delta \frac{\partial H}{\partial p'_h} \quad \text{und} \quad \delta \frac{\partial H}{\partial p_h}$$

und da die  $\delta C$  von der Zeit ganz unabhängig sind, so folgt aus 360)

$$\frac{d}{dt} \delta \frac{\partial H}{\partial p'_h} - \delta \frac{\partial H}{\partial p_h} = 0.$$

Ebenso folgt

$$\frac{d}{dt} \Delta \frac{\partial H}{\partial p'_h} - \Delta \frac{\partial H}{\partial p_h} = 0.$$

Wir subtrahieren die zweite dieser beiden Gleichungen von der ersten, nachdem wir die erste mit  $\Delta p_h$ , die zweite mit  $\delta p_h$  multipliziert haben. Wenn wir noch

$$\delta \frac{\partial H}{\partial p'_h} \frac{d \Delta p_h}{dt} - \Delta \frac{\partial H}{\partial p'_h} \frac{d \delta p_h}{dt} = \delta \frac{\partial H}{\partial p'_h} \Delta p'_h - \Delta \frac{\partial H}{\partial p'_h} \delta p'_h$$

einmal addieren, dann subtrahieren, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \Delta p_h \delta \frac{\partial H}{\partial p'_h} - \delta p_h \Delta \frac{\partial H}{\partial p'_h} \right] = \\ = \Delta p_h \delta \frac{\partial H}{\partial p_h} + \Delta p'_h \delta \frac{\partial H}{\partial p'_h} - \delta p_h \Delta \frac{\partial H}{\partial p_h} - \delta p'_h \Delta \frac{\partial H}{\partial p'_h}. \end{aligned}$$

Wir wollen hier dem  $h$  alle Werte erteilen und alle so erhaltenen Gleichungen addieren. Da die durch  $\delta$  und  $\Delta$  angezeigten Variationen vollständig voneinander unabhängig sind, so ist die Summe der beiden positiven Glieder, die man so rechts erhält, nichts anderes als  $\delta \Delta H$ , die Summe der beiden negativen aber nichts anderes als  $-\Delta \delta H$ . Da nun diese beiden Größen nach 361) untereinander gleich sind, so verschwindet die rechte Seite und es wird

$$\frac{d}{dt} \sum_h \Delta p_h \delta \frac{\partial H}{\partial p'_h} = \frac{d}{dt} \sum_h \delta p_h \Delta \frac{\partial H}{\partial p'_h}.$$

Da  $V$  die Geschwindigkeiten nicht enthält, so ist  $\partial H / \partial p'_h = \partial T / \partial p'_h = q_h$ , daher kann man die letzte Gleichung auch so schreiben:

$$362) \quad \frac{d}{dt} \sum_h (\Delta p_h \delta q_h - \delta p_h \Delta q_h) = 0.$$

Aus der Größe

$$363) \quad \sum_h (\Delta p_h \delta q_h - \Delta q_h \delta p_h)$$

muß also, wenn man alles durch die  $C$  und deren Variationen und die Zeit ausdrückt, die letztere herausfallen. Diese Größe kann so ausgedrückt nur Funktion der  $C$  und deren Variationen sein. Die letzteren enthält sie natürlich so, daß jedes Glied ein  $\delta C$  und ein  $\Delta C$  als Faktor hat.

Um zu zeigen, wie einfach der Sinn dieser Betrachtungen ist, wollen wir sie an einem ganz leichten Beispiele erörtern. Bestehe unser System aus einem einzigen materiellen Punkte von der Masse eins, dessen Abszisse  $p$  sei und der sich auf der Abszissenachse unter Einfluß einer Kraft  $-a^2p$  bewegt, die ihn gegen den Koordinatenanfangspunkt zieht und deren Intensität der Abszisse  $p$  proportional ist. Dann ist  $p = C_1 \sin(at + C_2)$ ,  $p' = a C_1 \cos(at + C_2)$

$$364) \quad \begin{cases} \delta p = \delta C_1 \sin(at + C_2) + C_1 \delta C_2 \cdot \cos(at + C_2) \\ \delta p' = a \delta C_1 \cos(at + C_2) - a C_1 \delta C_2 \cdot \sin(at + C_2) \\ \Delta p = \Delta C_1 \sin(at + C_2) + C_1 \Delta C_2 \cdot \cos(at + C_2) \\ \Delta p' = a \Delta C_1 \cos(at + C_2) - a C_1 \Delta C_2 \cdot \sin(at + C_2), \end{cases}$$

daher

$$\Delta \delta p = \delta C_1 \cdot \Delta C_2 \cos(at + C_2) + \delta C_2 \Delta C_1 \cos(at + C_2) - \\ - C_1 \delta C_2 \Delta C_2 \sin(at + C_2)$$

und derselbe Wert folgt für  $\delta \Delta p$ . Es ist  $q = p'$ . Die Gleichung 362) besagt daher, daß  $\Delta p \delta p' - \delta p \Delta p'$  die Zeit nicht enthält, sondern nur Funktion der Integrationskonstanten und ihrer Variationen ist. In der That folgt aus 364)

$$\Delta p \delta p' - \delta p \Delta p' = a C_1 (\delta C_1 \Delta C_2 - \Delta C_1 \delta C_2).$$

Wir wollen nun zur Methode der Variation der Konstanten übergehen.

#### ✓ § 69. Lagranges Methode der Variation der Konstanten.

Es seien die

$$365) \quad p, p' \text{ und } q$$

als solche Funktionen der Zeit  $t$  und von 2s Integrationskonstanten  $C$  gefunden, daß die Gleichungen 360) erfüllt sind, in denen die Kraftfunktion  $V$  einen bestimmt gegebenen

Wert hat. Wir nennen die durch diese Werte der  $p$  bestimmte Bewegung die ungestörte. Nun sollen zu den während derselben wirkenden Kräften noch sehr kleine, die störenden hinzukommen, wodurch der Wert der Kraftfunktion von  $V$  in  $V + \Omega$  übergehen soll.  $\Omega$  ist natürlich im allgemeinen eine Funktion der Koordinaten und der Zeit, deren Wert aber immer klein sei. Die unter der Mitwirkung dieser störenden Kräfte stattfindende Bewegung nennen wir die gestörte.

Die Gleichungen 360\*) für dieselbe unterscheiden sich von den Gleichungen 360) bloß dadurch, daß  $V + \Omega$  an die Stelle von  $V$  tritt und wir stellen uns die Aufgabe in die Werte 365), welche die Gleichungen 360) für die ungestörte Bewegung befriedigen, statt der Konstanten  $C$  solche Funktionen der Zeit zu setzen, daß die hierdurch erhaltenen Variablen

$$366) \quad \bar{p}, \bar{p}', \bar{q}$$

die Gleichungen 360\*) für die gestörte Bewegung erfüllen.

Da nun die  $C$  variabel sind, so werden sie während der Zeit  $dt$  gewisse Zuwächse  $dC_1, dC_2 \dots dC_{2s}$  erfahren und wir wollen den Zuwachs, den irgend eine Funktion der Variablen 365) dadurch erfährt, daß man darin bloß den  $C$  diese Zuwächse erteilt, durch Vorsezen des Zeichens  $d_1$  ausdrücken. Dieser Zuwachs ist bloß durch eine kleine Veränderung der Werte der Integrationskonstanten entstanden und hat daher ganz die Eigenschaften der früher mit  $\delta$  oder  $\Delta$  bezeichneten Zuwächse. Dann ist also

$$\frac{d p_h}{d t} = \frac{d p_h}{d t} + \frac{d_1 p_h}{d t},$$

wobei das erste Glied rechts den Differentialquotienten des  $p_h$  nach der Zeit bei konstanten  $C$  ausdrückt.

Es sollen nun die  $2s$  Größen  $C$  so gewählt werden, daß für jedes  $h$

$$367) \quad \frac{d_1 p_h}{d t} = 0$$

ist. Die physikalische Bedeutung der letzten Gleichung kann man sich folgendermaßen klar machen. Wenn man

aus den Variabeln 365) die Variabeln 366) bildet, d. h. statt der  $C$  diejenigen Funktionen der Zeit setzt, welche wir finden werden, so erhält man die gestörte Bewegung. Wenn man nun von irgend einer Zeit  $t$  an plötzlich den  $C$  diejenigen konstanten Werte erteilt, welche sie gerade zu jener Zeit haben, so stimmen sowohl die Werte der  $p$  als auch der  $p'$  genau mit jenen überein, welche diese Größen hätten, wenn die  $C$  variabel blieben. Man erhält also durch diese Operation die Bewegung, welche das System in der Folgezeit machen würde, wenn zur Zeit  $t$  ohne Änderung der Positionen und Geschwindigkeiten der Systempunkte die störenden Kräfte plötzlich aufhören würden. Man nennt die Bewegung, welche dann einträte, die oskulierende ungestörte Bewegung.

Wenn z. B.  $V$  die Kraftfunktion der Sonnenanziehung auf die Erde,  $\Omega$  die der anderen Himmelskörper ist, so liefert die plötzliche Konstantsetzung aller  $C$  die Ellipse, welche die Erde um die Sonne beschreiben würde, wenn plötzlich alle Störungen aufhörten. Noch einfacher: wenn wir das Übergewicht an der Atwoodschen Fallmaschine als Störung und  $\Omega$  als dessen Kraftfunktion ansehen, so erhalten wir durch plötzliches Konstantmachen der  $C$  die Bewegung nach Abheben des Übergewichts.

Wir können daher die gestörte Bewegung so auffassen, als ob in jedem Zeitmomente die oskulierende ungestörte Bewegung statthätte, sich aber deren Integrationskonstanten allmählich mit der Zeit ändern würden; z. B. die gestörte Erdbahn so, als ob sich die Erde immer in einer Ellipse um die Sonne bewegte, deren Achsen, Ebene etc. sich langsam änderten, den freien Fall so, als ob die Bewegung in jedem Augenblicke gleichförmig wäre, aber die Geschwindigkeit sich mit der Zeit änderte.

Die Variabeln 366) sollen nun der Gleichung 360\*) genügen, welche man aus 360) erhält, wenn man  $V + \Omega$  statt  $V$  substituiert und welche wir so schreiben können:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{p}_h} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{p}_h} - \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{p}_h} - \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{p}_h}.$$

Die Querstriche drücken aus, daß überall die Variabeln 366) statt 365) substituiert sind. Nun sind sowohl die  $\bar{p}$  als auch die  $\bar{p}'$  genau so wie die  $p$  und  $p'$  aus der Zeit und den  $C$  zusammengesetzt; nur daß in den ersteren die  $C$  als Funktionen der Zeit zu betrachten sind. Daher sind auch  $\bar{V}$ ,  $\bar{T}$ ,  $\partial \bar{V} / \partial \bar{p}_h$ ,  $\partial \bar{T} / \partial \bar{p}_h$  und  $\partial \bar{T} / \partial \bar{p}'_h$  die gleichen Funktionen der Zeit und der  $C$  wie die entsprechenden ungestrichenen Größen; nur daß wieder die  $C$  Funktionen der Zeit sind. Dies muß bei Bildung von  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{p}'_h}$  beachtet werden. Wir denken uns daher in  $\partial \bar{T} / \partial \bar{p}'_h$  die  $p$  und  $p'$  als Funktionen der Zeit und der  $C$  ausgedrückt und bezeichnen durch Weglassung des Querstrichs ihren Differentialquotienten nach der Zeit bei konstanten  $C$ , durch das vorgesetzte  $d_1$  aber den Zuwachs, der durch bloße Veränderung der  $C$  eintritt, also die Eigenschaften des früher durch das Zeichen  $\delta$  oder  $\Delta$  ausgedrückten Zuwachses hat. Dann ist also

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p'_h} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p'_h} + \frac{d_1}{dt} \frac{\partial T}{\partial p'_h}.$$

Substituieren wir alle diese Werte in die Gleichung 360\*), so folgt:

$$368) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p'_h} + \frac{d_1}{dt} \frac{\partial T}{\partial p'_h} = \frac{\partial T}{\partial p_h} - \frac{\partial \bar{V}}{\partial p_h} - \frac{\partial \bar{Q}}{\partial p_h}.$$

Denken wir uns nun die  $p$  und  $p'$  als Funktionen der Zeit und der  $C$  ausgedrückt, so sind die in dieser Gleichung vorkommenden Größen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p'_h}, \quad \frac{\partial T}{\partial p_h} \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial p_h}$$

identisch ebenso aus  $t$  und den  $C$  zusammengesetzt, wie die Größen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p'_h}, \quad \frac{\partial T}{\partial p_h} \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial p_h}$$

der Gleichung 360). Letztere Größen erfüllen aber dann letztere Gleichung identisch, d. h. für alle Werte der  $C$  und



des  $t$ . Daher tilgen sich auch die entsprechenden Glieder identisch in der Gleichung 368) und diese reduziert sich auf

$$369) \quad \frac{d_1}{dt} \frac{\partial T}{\partial p'_h} = - \frac{\partial \Omega}{\partial p_h}.$$

Da nun  $\Omega$  ein kleines Zusatzglied ist, so werden sich auch die Werte der Variabeln 366), wenigstens wenn die verstrichene Zeit nicht zu lange ist, nur wenig von denen der Variabeln 365) unterscheiden. Wir können daher angenähert in der obnedies kleinen rechten Seite der letzten Gleichung letztere für erstere schreiben und die  $C$  konstant ansehen und erhalten:

$$369) \quad \frac{d_1}{dt} \frac{\partial T}{\partial p'_h} = - \frac{\partial \Omega}{\partial p_h}.$$

Dies sind  $s$  lineare Gleichungen zwischen den Größen  $dC/dt$ . Die Gleichungen 367) stellen nochmals  $s$  lineare Gleichungen zwischen denselben Größen dar, so daß alle diese Größen als Funktionen der Zeit bestimmt werden können. Ihre Werte für eine bestimmte Zeit stellen die  $2s$  Integrationskonstanten dar.

Die  $2s$  linearen Gleichungen für die  $dC/dt$  werden am leichtesten auf einem Umwege gelöst. Wir erteilen zu diesem Behufe bei der ungestörten Bewegung den  $C$  ganz willkürliche unendlich kleine Zuwächse  $\Delta C_1, \Delta C_2 \dots \Delta C_s$ , und bezeichnen den Zuwachs, welchen die Variabeln 365) und irgendwelche Funktionen derselben dadurch erleiden, durch das vorgesetzte  $\Delta$ . Wir multiplizieren ferner die Gleichung 369) mit  $\Delta p_h$ , die Gleichung 367) mit  $-\Delta q_h$  und addieren alle diese Gleichungen, in denen dem  $h$  alle Werte von 1 bis  $s$  zu erteilen sind, dann folgt:

$$370) \quad \sum_1^s \left( \Delta p_h \frac{d_1 q_h}{dt} - \Delta q_h \frac{d_1 p_h}{dt} \right) = - \sum_1^s \frac{\partial \Omega}{\partial p_h} \Delta p_h = - \Delta \Omega.$$

Hier wurde wieder  $q_h$  für  $\partial T / \partial p'_h$  geschrieben; ferner bedeutet links die Größe  $d_1 q_h$  den Zuwachs, den  $q_h$  erleidet, wenn die  $C$  irgendwelche Zuwächse  $dC_1, dC_2 \dots dC_s$  erfahren, hat also denselben Sinn, wie die in 362) mit  $\delta q_h$  bezeichnete Größe. Nur daß bei  $d_1 q_h$  die Zuwächse der  $C$

mit  $dC$ , bei  $\delta q_h$  aber mit  $\delta C$  bezeichnet wurden. Ja es sind die  $dC$  im Grunde auch willkürlich Zuwächse, da ja  $\Omega$  ganz nach Belieben gewählt werden kann.

Es wird daher nach Gleichung 362) der Ausdruck

$$371) \quad \sum_{h=1}^{h=s} (\Delta p_h d_1 q_h - \Delta q_h d_1 p_h),$$

wenn man alle  $p$ ,  $p'$  und  $q$  durch die  $C$  und  $t$  ausdrückt, nur eine Funktion der Integrationskonstanten  $C$  und ihrer Zuwächse  $\Delta C$  und  $dC$  sein können. Natürlich muß er sowohl bezüglich der  $dC$  als auch bezüglich der  $\Delta C$  linear und homogen sein, wie der Ausdruck 363) bezüglich der  $\delta C$  und  $\Delta C$ . Auch rechts können wir in Gleichung 370) im Ausdrucke für  $\Omega$  die  $p$  durch die  $C$  und  $t$  ausdrücken. Da  $\Delta \Omega$  der Zuwachs ist, der bloß dadurch entsteht, daß die  $C$  um die  $\Delta C$  wachsen, so ist

$$\Delta \Omega = \sum_1^s \frac{\partial \Omega}{\partial C_h} \Delta C_h.$$

Nun sind aber die  $\Delta C$  vollkommen willkürlich. Wir können daher links und rechts die mit je einem  $\Delta C$  multiplizierten Glieder für sich einander gleich setzen. Wir erhalten so jedes  $\partial \Omega / \partial C$  als lineare Funktion der  $dC/dt$ , deren Koeffizienten nicht die Zeit, nur die  $C$  enthalten, da die ganze linke Seite der Gleichung 370) die Zeit nicht enthält. Durch Auflösung dieser Gleichungen nach den  $dC/dt$  erhalten wir umgekehrt letztere als lineare Funktionen der  $\partial \Omega / \partial C$ , deren Koeffizienten natürlich wieder nur die  $C$ , nicht die Zeit enthalten.

Die letzteren Gleichungen erhalten wir noch kürzer in folgender Weise: Wir bezeichnen die Werte der  $p$  und  $q$  für die Anfangszeit mit  $p$  und  $q$ . Wir können dieselben als die Integrationskonstanten  $C$  wählen, also die Variabeln 365), und daher auch die Größe  $\Omega$  der rechten Seite der Gleichung 370) durch  $t$  und die  $p$ ,  $q$  ausdrücken. Da  $\Delta \Omega$  der Zuwachs ist, den diese Größe bloß dadurch erfährt, daß die Integrationskonstanten die mit  $\Delta$  bezeichneten Zuwächse erfahren, so wird dann:

$$372) \quad \Delta \Omega = \sum_1^s \left( \frac{\partial \Omega}{\partial p_h} \Delta p_h + \frac{\partial \Omega}{\partial q_h} \Delta q_h \right).$$

Die linke Seite der Gleichung 370) reduziert sich für die Anfangszeit auf

$$373) \quad \sum_1^s \left( \Delta p_h \frac{d_1 q_h}{dt} - \Delta q_h \frac{d_1 p_h}{dt} \right)$$

und da sie die Zeit nicht explizit enthält, muß sie zu allen Zeiten diesen Wert haben.

Der Index 1 beim Differentialzeichen kann jetzt wegleiben, da  $p_h$  und  $q_h$  die Integrationskonstanten selbst sind, also von den Veränderungen, die sie erleiden, wenn man unter Konstanthaltung der Integrationskonstanten die Zeit wachsen läßt, keine Rede sein kann. Man erhält also, wenn man in 370) die Werte 372) und 373) substituiert:

$$\sum_1^s \left[ \left( \frac{d q_h}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial p_h} \right) \Delta p_h - \left( \frac{d p_h}{dt} - \frac{\partial \Omega}{\partial q_h} \right) \Delta q_h \right] = 0$$

und da die Werte sämtlicher Integrationskonstanten und daher auch der mit  $\Delta$  bezeichneten Zuwächse derselben willkürlich sind, so folgt

$$374) \quad \frac{d q_h}{dt} = - \frac{\partial \Omega}{\partial p_h}, \quad \frac{d p_h}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial q_h}.$$

Wollen wir lieber irgendwelche andere Integrationskonstanten  $C_1, C_2, C_3 \dots C_s$  einführen, so können wir diese als Funktionen der  $p, q$  und umgekehrt ausgedrückt denken. Es ist also

$$\frac{d C_k}{dt} = \sum_1^s \left( \frac{\partial C_k}{\partial p_h} \frac{d p_h}{dt} + \frac{\partial C_k}{\partial q_h} \frac{d q_h}{dt} \right),$$

daher nach Substitution der Werte 374)

$$\frac{d C_k}{dt} = \sum_1^s \left( \frac{\partial C_k}{\partial p_h} \frac{\partial \Omega}{\partial q_h} - \frac{\partial C_k}{\partial q_h} \frac{\partial \Omega}{\partial p_h} \right),$$

Nun ist aber

$$375) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial p_h} = \sum_k^{2s} \frac{\partial \Omega}{\partial C_k} \frac{\partial C_k}{\partial p_h}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial q_h} = \sum_l^{2s} \frac{\partial \Omega}{\partial C_l} \frac{\partial C_l}{\partial q_h},$$

daher

$$376) \quad \frac{d C_k}{d t} = \sum_l^{2s} (C_k, C_l) \frac{\partial \Omega}{\partial C_l},$$

wobei symbolisch gesetzt wurde

$$377) \quad (C_k, C_l) = \sum_h^s \left( \frac{\partial C_k}{\partial p_h} \frac{\partial C_l}{\partial q_h} - \frac{\partial C_k}{\partial q_h} \frac{\partial C_l}{\partial p_h} \right),$$

aus welcher Definition folgt:

$$378) \quad (C_k, C_l) = -(C_l, C_k), \quad (C_k, C_k) = 0.$$

Wir haben bewiesen, daß die Koeffizienten der Gleichungen, welche die  $dC/dt$  durch die  $\partial \Omega / \partial C$  ausdrücken, nur Funktionen der Integrationskonstanten sein können, es sind also die  $(C_k, C_l)$  konstante GröÙe. Natürlich ist der Zeitanfang vollkommen willkürlich; man kann also statt der  $p, q$  wieder die zu einer beliebigen Zeit  $t$  gehörigen Werte  $p, q$  setzen. Die GröÙe

$$379) \quad (C_k, C_l) = \sum_h^s \left( \frac{\partial C_k}{\partial p_h} \frac{\partial C_l}{\partial q_h} - \frac{\partial C_k}{\partial q_h} \frac{\partial C_l}{\partial p_h} \right)$$

ist daher mit 377) vollkommen identisch und ebenfalls nur Funktion der Integrationskonstanten oder eine reine Konstante. Wenn daher  $\varphi = C_k$  und  $\psi = C_l$  zwei beliebige Integrale der Bewegungsgleichungen 360) sind, wobei  $\varphi$  und  $\psi$  Funktionen von  $t$  und den  $p$  und  $q$  sind, so muß der Wert der GröÙe

$$(C_k, C_l) = (\varphi, \psi) = \sum_h^s \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q_h} \frac{\partial \psi}{\partial p_h} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_h} \frac{\partial \psi}{\partial q_h} \right)$$

wieder von der Zeit unabhängig sein.

Dieser Satz wurde von Poisson gefunden. Jacobi erkannte, daß er auch zur Ableitung eines neuen Integrales

aus zwei gefundenen benutzt werden kann. Sobald nämlich aus  $(\varphi, \psi)$  nicht alle  $p$  und  $q$  identisch herausfallen, so wird immer die Gleichung

$$(\varphi, \psi) = \text{konst.}$$

von denjenigen Werten der  $p$  und  $q$ , welche den Bewegungsgleichungen 360) genügen, erfüllt. Diese Gleichung ist also jedenfalls ein Integral der Bewegungsgleichungen. Sie muß aber nicht ein neues sein. Sie kann auch eine Kombination der beiden benutzten Integrale  $\varphi = C_k$ ,  $\psi = C_l$  sein, so daß sie von allen Werten der  $p$ ,  $q$ , welche diesen Gleichungen genügen, ebenfalls erfüllt wird. Sie kann auch ein anderes schon bekanntes Integral sein.

#### § 70. Beispiele.

Sei ein System materieller Punkte gegeben, für welches bezüglich zweier Koordinatenachsen, z. B. der  $x$ - und  $y$ -Achse, die Gleichungen des Flächenprinzips

$$380) \quad \sum_1^n m_h (y_h x'_h - x_h y'_h) = a, \quad \sum_1^n m_h (x_h x'_h - x_h x'_h) = b$$

gelten. Dann können wir diese beiden Ausdrücke als  $\varphi$  und  $\psi$ , die rechtwinkligen Koordinaten aber als  $p$  wählen. Es reduziert sich  $(\varphi, \psi)$  auf

$$- \sum_1^n \frac{1}{m_h} \left( \frac{\partial a}{\partial x'_h} \frac{\partial b}{\partial x_h} - \frac{\partial a}{\partial x_h} \frac{\partial b}{\partial x'_h} \right) = \sum_1^n m_h (x_h y'_h - y_h x'_h).$$

Da dieser Ausdruck nach dem Poissonschen Satze konstant sein muß, so lehrt dieser, daß, wenn für ein System die beiden Gleichungen 380) bestehen, daraus die Richtigkeit der analogen Gleichung für die dritte Koordinatenachse folgt.

Hat man aus 376) die  $p$  in weiterer Annäherung gefunden, wobei rechts die  $C$  als konstant betrachtet werden können, da ihre kleinen Änderungen mit den kleinen Größen  $\partial \Omega / \partial C$  multipliziert sind, so erscheinen daselbst zu den Integrationskonstanten gewisse kleine Funktionen der Zeit addiert. Man kann diese korrigierten Werte in  $\Omega$  einsetzen und nach

Potenzen der neu hinzugekommenen Glieder entwickeln. Man erhält dann zu dem Werte des  $\Omega$ , den wir bisher benutzten, noch ein Glied hinzu. Man kann nun wie früher die Integrationskonstanten wiederum so variieren, daß die Werte der  $p$  die Bewegungsgleichungen inklusive der neu hinzugekommenen Glieder erfüllen und schließlich in dieser Weise die Annäherung so weit treiben, als man will.

Als Beispiel betrachten wir wieder den Fall, wo die Abszisse  $p$  eines auf der Abszissenachse beweglichen materiellen Punktes durch die Gleichung

$$381) \quad \frac{d^2 p}{dt^2} = -a^2 p - \frac{\partial \Omega}{\partial p}$$

bestimmt ist. Das letzte Glied sei die störende Kraft. Für die ungestörte Bewegung ist

$$382) \quad p = p \cos at + \frac{q}{a} \sin at = C_1 \sin(at + C_2), \\ q = p' = -a p \sin at + q \cos at = a C_1 \cos(at + C_2).$$

Daraus folgt:

$$d_1 p = d p \cos at + \frac{d q}{a} \sin at, \quad \Delta p = \Delta p \cos at + \frac{\Delta q}{a} \sin at \\ d_1 q = -a d p \sin at + d q \cos at, \quad \Delta q = -a \Delta p \sin at + \Delta q \cos at \\ d_1 q \Delta p - d_1 p \Delta q = d q \Delta p - d p \Delta q = -\Delta \Omega dt,$$

wobei in  $\Omega$  zu setzen ist  $p = p \cos at + \frac{q}{a} \sin at$ . Daher folgt

$$383) \quad \frac{d p}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial q}, \quad \frac{d q}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial p}.$$

Lautet die Gleichung 381) so:  $\frac{d^2 p}{dt^2} = -a^2 p + f(t)$ , so ist

$$\Omega = -p f(t) = -p f(t) \cos at - \frac{q}{a} f(t) \sin at.$$

Es folgt daher aus 383)

$$384) \quad p = -\frac{1}{a} \int f(t) \sin(at) dt, \quad q = \int f(t) \cos(at) dt.$$

Man sieht leicht, daß die hier behandelte Methode in diesem einfachen Falle mit der Methode identisch ist, nach welcher

aus dem allgemeinen Integrals einer linearen Differentialgleichung ohne zweiten Teil das der entsprechenden mit zweitem Teile abgeleitet wird und welche man gemeiniglich ebenfalls die Methode der Variation der Konstanten zu nennen pflegt. Wollte man die Konstanten  $C$  einführen, so wäre

$$C_1 = \sqrt{p^2 + \frac{q^2}{a^2}} = \sqrt{p^2 + \frac{q^2}{a^2}},$$

$$C_2 = \operatorname{arctg} \frac{ap}{q} - at = \operatorname{arctg} \frac{ap}{q} - at_0,$$

$$(C_1, C_1) = (C_2, C_2) = 0,$$

$$\begin{aligned} (C_1, C_2) &= -(C_2, C_1) = \frac{\partial C_1}{\partial q} \frac{\partial C_2}{\partial p} - \frac{\partial C_1}{\partial p} \frac{\partial C_2}{\partial q} = \\ &= \frac{\partial C_1}{\partial q} \frac{\partial C_2}{\partial p} - \frac{\partial C_1}{\partial p} \frac{\partial C_2}{\partial q} = \frac{1}{a} \frac{1}{C_1}, \end{aligned}$$

$$\Omega = -C_1 f(t) \sin(at + C_2).$$

Die Gleichungen 376) gehen daher über in

$$385) \quad \frac{dC_1}{dt} = \frac{f(t)}{a} \cos(at + C_2), \quad \frac{dC_2}{dt} = -\frac{f(t)}{a C_1} \sin(at + C_2).$$

Würde man aus den Gleichungen 385)  $C_1$  und  $C_2$  exakt bestimmen und diese Werte in die Gleichung 381) substituieren, so würde man eine exakte Lösung der Aufgabe erhalten, dagegen nur eine angenäherte, wenn man die Gleichungen 385) dadurch in lineare verwandeln würde, daß man auf der rechten Seite dieser Gleichungen, wo noch der sehr kleine Faktor  $f(t)$  dabei steht,  $C_1$  und  $C_2$  als Konstanten ansähe. Jedenfalls aber erhält man eine exakte Lösung, wenn man die Werte 384) für  $p$  und  $q$  in die Formel 382) einsetzt, und  $\frac{\partial \Omega}{\partial p}$  bloß als Funktion der Zeit gegeben ist. Enthält es dagegen noch  $p$ , so kann man folgendes sukzessives Annäherungsverfahren einschlagen. Man gibt den bisher mit  $p$  und  $q$  bezeichneten Konstanten den Index Null, den variablen Größen, welche bei der zweiten Annäherung sich zu ihnen dazu addieren, den Index Eins, denen die beim dritten Grade der Annäherung sich weiter dazu addieren, den Index Zwei etc. Dann ist in erster Annäherung

$$p = v_0 \cos(at) + \frac{q_0}{a} \sin(at),$$

$\Omega$  aber, welches wir als Funktionen von  $p$  und  $t$  in der Form  $\Omega(p, t)$  schreiben, gleich

$$\Omega_0 = \Omega\left(v_0 \cos at + \frac{q_0}{a} \sin at, t\right).$$

Man erhält daher statt der Formeln 383)

$$q_1 = - \int dt \Omega'_0 \cos(at), \quad v_1 = \frac{1}{a} \int dt \sin at \Omega'_0.$$

Dabei sollen  $\Omega', \Omega'' \dots$  die sukzessiven partiellen Ableitungen des  $\Omega$  nach  $p$  sein. Der Index Null bedeutet, daß hinterher  $v_0 \cos at + \frac{q_0}{a} \sin at$  für  $p$  zu setzen ist. Es ist also in zweiter Annäherung

$$p = (v_0 + v_1) \cos at + \frac{q_0 + q_1}{a} \sin at$$

und zu  $\Omega_0$  tritt das Glied hinzu:

$$\left(v_1 \cos at + \frac{q_1}{a} \sin at\right) \Omega'_0 = \Omega_1.$$

Man erhält daher eine weitere Annäherung, wenn man zu  $v_1$  und  $q_1$  noch die Größen  $v_2$  und  $q_2$  addiert. Dabei ist:

$$\begin{aligned} v_2 = \int dt \frac{\partial \Omega_1}{\partial q_0} &= \frac{1}{a^2} \int dt \Omega''_0 \sin at \left[ \cos at \int \Omega'_0 \sin at dt - \right. \\ &\quad \left. - \sin at \int \Omega'_0 \cos at dt \right] + \frac{1}{a^2} \int dt \Omega'_0 \left[ \cos at \int dt \Omega''_0 \sin^2 at - \right. \\ &\quad \left. - \sin at \int dt \Omega''_0 \sin at \cos at. \right] \end{aligned}$$

Ein analoger Ausdruck folgt für  $q_2 = \int dt \frac{\partial \Omega_1}{\partial v_0}$ . Der Wert

$$p = (v_0 + v_1 + v_2) \cos at + \frac{q_0 + q_1 + q_2}{a} \sin at$$

bildet also den dritten Grad der Annäherung. Die Integrationen reduzieren sich, wenn  $\Omega$  als Funktion von  $p$  und  $t$  gegeben ist, auf Quadraturen, die aber natürlich bald sehr weitschweifig werden.



## § 71. Direkte Methode der Variation der Konstanten.

Die bisher befolgte Lagrangesche Methode gewährt zwar manchen Einblick in den inneren Zusammenhang; doch ist sie immerhin mehr indirekt. Wir wollen daher die in § 69 gewonnenen Resultate unabhängig von der dortigen Beweisführung nochmals ableiten. Wir führen sogleich die Variablen  $p$  und  $q$  ein, schreiben also die Bewegungsgleichungen für das unvariierte Problem in der Form:

$$386) \quad \frac{dp_h}{dt} = \frac{\partial E}{\partial q_h}, \quad \frac{dq_h}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial p_h},$$

für das variierte aber in der Form:

$$387) \quad \frac{dp_h}{dt} = \frac{\partial E}{\partial q_h}, \quad \frac{dq_h}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial p_h} - \frac{\partial \Omega}{\partial p_h},$$

wobei  $T$  die lebendige Kraft,  $V$  die Kraftfunktion des unvariirten,  $V + \Omega$  die des variierten Problems und  $E = T + V$  ist.

Es seien  $C_1, C_2 \dots C_s$ , willkürliche voneinander unabhängige Konstanten,

$$388) \quad \varphi_k(p, q, t) = C_k, \quad k = 1, 2 \dots s,$$

die Integrale des unvariirten Problems also der Gleichungen 386), so daß

$$389) \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \sum_h \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_h} \frac{\partial E}{\partial q_h} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_h} \frac{\partial E}{\partial p_h} \right) = 0$$

ist. Wir wollen nun die  $C_k$  gleich solchen mit einer willkürlichen Konstanten vermehrten Funktionen der Zeit setzen, daß 388) die Integrale des variierten Problems, also der Gleichungen 387) werden. Aus 388) folgt zunächst:

$$390) \quad \frac{dC_k}{dt} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \sum_h \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_h} \frac{dp_h}{dt} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_h} \frac{dq_h}{dt} \right).$$

Solange die  $C$  konstant sind, müssen die Gleichungen 388) die Integrale der Gleichungen 386) sein. Die bei Konstanz der  $C$  aus 388) gebildeten Werte von

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_h} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi_h}{\partial q_h}$$

müssen daher die Gleichungen 389) identisch erfüllen. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes erhält man, wenn man in Gleichung 390) für  $\frac{d p_h}{d t}$  und  $\frac{d q_h}{d t}$  ihre Werte aus 387) substituiert, was erlaubt ist, da ja die  $C$  so als Funktionen der Zeit gewählt werden sollen, daß die Gleichungen 387) erfüllt sind

$$\frac{d C_k}{d t} = - \sum_1^s \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_h} \frac{\partial \Omega}{\partial p_h}.$$

Dafür kann man auch schreiben:

$$391) \quad \frac{d C_k}{d t} = \sum_1^s \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_h} \frac{\partial \Omega}{\partial q_h} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_h} \frac{\partial \Omega}{\partial p_h} \right) = (\varphi_k, \Omega),$$

da ja  $\Omega$  die  $q$  nicht enthält, daher  $\partial \Omega / \partial q_h = 0$  ist. Da  $\Omega$  klein ist, können in der letzten Gleichung rechts für  $p$  und  $q$  die für das unvariierte Problem geltenden Funktionen der Zeit gesetzt werden. Wir wollen nun die partiellen Differentialquotienten  $\partial \varphi_1 / \partial p_h \dots$  einfach mit  $\partial C_1 / \partial p_h \dots$  bezeichnen, um nicht beide Buchstaben  $\varphi$  und  $C$  mit-schleppen zu müssen. Daher schreiben wir auch in Gleichung 391)  $\partial C_k / \partial p_h$  und  $\partial C_k / \partial q_h$  für  $\partial \varphi / \partial p_h$  und  $\partial \varphi / \partial q_h$ .

Denken wir  $\Omega$  durch  $t$  und die  $C$  ausgedrückt, so wird

$$\frac{\partial \Omega}{\partial p_h} = \sum_{i=1}^{i=2s} \frac{\partial \Omega}{\partial C_i} \frac{\partial C_i}{\partial p_h}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial q_h} = \sum_{i=1}^{i=2s} \frac{\partial \Omega}{\partial C_i} \frac{\partial C_i}{\partial q_h} = 0,$$

daher verwandelt sich Gleichung 391) in

$$392) \quad \frac{d C_k}{d t} = \sum_1^{2s} i (C_k, C_i) \frac{\partial \Omega}{\partial C_i},$$

wodurch die Gleichung 376) in einfachster Weise bewiesen ist.  $(C_k, C_i)$  ist wie dort durch die Gleichung 379) gegeben. Doch haben wir hier keinen Beweis erbracht, daß nicht  $(C_k, C_i)$  außer den  $C$  auch noch die Zeit explizit enthalten könne. Es hat jedoch keine Schwierigkeit diesen Beweis

ebenfalls direkt zu führen. Seien  $C_k = \varphi(p, q, t)$  und  $C_l = \psi(p, q, t)$  zwei der Integrale 388), so ist nach 379) die Definition von  $(C_k, C_l)$  die folgende:

$$(C_k, C_l) = \sum_1^s \left( \frac{\partial \varphi}{\partial p_h} \frac{\partial \psi}{\partial q_h} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_h} \frac{\partial \psi}{\partial p_h} \right),$$

daher ist

$$393) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d(C_k, C_l)}{dt} &= \sum_1^s \left( \frac{\partial \varphi}{\partial p_h} \frac{d}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial q_h} + \frac{\partial \psi}{\partial q_h} \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial p_h} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \varphi}{\partial q_h} \frac{d}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial p_h} - \frac{\partial \psi}{\partial p_h} \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial q_h} \right), \end{aligned} \right.$$

da  $\varphi = C_k$  ein Integral der Gleichungen 386) ist, so hat man analog mit 389)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_1^s \left( \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial E}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial E}{\partial p_i} \right) = 0.$$

Durch partielle Differentiation dieser identischen Gleichungen nach  $p_h$  oder  $q_h$  folgt

$$394) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial p_h} &= \sum_1^s \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_h \partial q_i} \frac{\partial E}{\partial p_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_h} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_i \partial p_h} \frac{\partial E}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial^2 E}{\partial p_h \partial q_i} \right), \end{aligned} \right.$$

$$395) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial q_h} &= \sum_1^s \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_h \partial q_i} \frac{\partial E}{\partial p_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial q_h} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_i \partial q_h} \frac{\partial E}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial^2 E}{\partial q_h \partial q_i} \right). \end{aligned} \right.$$

Andererseits folgt direkt, indem man wieder für  $dp_h/dt$  und  $dq_h/dt$  die Werte 386) substituiert:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial p_h} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial p_h} + \sum_1^s \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_h \partial p_i} \frac{\partial E}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_h \partial q_i} \frac{\partial E}{\partial p_i} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q_h} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial q_h} + \sum_1^s \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_i \partial q_h} \frac{\partial E}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_h \partial q_i} \frac{\partial E}{\partial p_i} \right),$$

die Substitution der Werte 394) und 395) in diese Gleichungen liefert:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial p_h} \right) = \sum_i^s \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_h} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial^2 E}{\partial p_h \partial q_i} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q_h} \right) = \sum_i^s \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial q_h} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial^2 E}{\partial q_h \partial q_i} \right).$$

Die Werte von  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \psi}{\partial p_h} \right)$  und  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \psi}{\partial q_h} \right)$  findet man, indem man  $\psi$  mit  $\varphi$  vertauscht. Substituiert man diese vier Werte in 393), so erhält man rechts eine Doppelsumme, in der sich, wie man leicht sieht, je zwei Glieder heben. Es folgt also  $d(C_k, C_l)/dt = 0$ ,  $(C_k, C_l)$  kann die Zeit nicht explizit enthalten.

#### § 72. Einführung der Hamiltonschen Konstanten.

Wir haben das Problem jetzt in der allgemeinsten Weise gelöst und in den Gleichungen 392) ganz beliebige Integrationskonstanten eingeführt. Diese Gleichungen vereinfachen sich, wie Jacobi gezeigt hat, enorm, wenn man solche Integrationskonstanten einführt, wie man sie bei der Integration der Differentialgleichungen 386) des ungestörten Problems nach der Hamiltonschen Methode erhält.

Man hat da zuerst ein vollständiges Integral der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t} + E = 0$$

zu suchen, welches  $s$  voneinander unabhängige Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_s$  enthält, von denen keine additiv zu  $W$  hinzukommt. Die Gleichungen

$$396) \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2 \dots \frac{\partial W}{\partial \alpha_s} = \beta_s$$

sind dann Integralgleichungen der Gleichungen 386), d. h. sie drücken die  $p$  als Funktionen der  $2s$  willkürlichen Integrationskonstanten  $\alpha$  und  $\beta$  so aus, daß die Gleichungen 386) erfüllt sind. Die  $\alpha$  und  $\beta$  sind also  $2s$  will-

kürliche Integrationskonstanten und da die Formeln 392) von beliebigen derartigen Integrationskonstanten gelten, so müssen sie auch von den  $\alpha$  und  $\beta$  gelten. Wir können diese so als Funktionen der Zeit mit additiven willkürlichen Konstanten bestimmen, daß die Gleichungen 396) die Integrale der Gleichungen 387) sind. Dazu ist erforderlich, daß die  $\alpha$  und  $\beta$  den den Gleichungen 392) analogen Gleichungen:

$$397) \quad \begin{cases} \frac{d\alpha_k}{dt} = \sum_{i=1}^s (\alpha_k, \alpha_i) \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_i} + \sum_{i=1}^s (\alpha_k, \beta_i) \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_i} \\ \frac{d\beta_k}{dt} = \sum_{i=1}^{l+s} (\beta_k, \alpha_i) \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_i} + \sum_{i=1}^{l+s} (\beta_k, \beta_i) \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_i}, \end{cases}$$

genügen. Es ist

$$398) \quad (\alpha_k, \alpha_l) = \sum_{h=1}^{h=s} \left( \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_h} \frac{\partial \alpha_l}{\partial q_h} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_h} \frac{\partial \alpha_l}{\partial p_h} \right)$$

und ähnliche Bedeutungen haben  $(\alpha_k, \beta_l)$  und  $(\beta_k, \beta_l)$ . Hierbei ist jedoch jedes  $\alpha$  oder  $\beta$  als Funktion der  $p$ ,  $q$  und von  $t$  ausgedrückt zu denken.

Wir wollen Kürze halber jede partielle Differentiation von  $W$  nach  $\alpha_h$  durch den oben angehängten Index  $h$ , jede nach  $p_k$  durch den unten angehängten Index  $k$  markieren, so daß z. B.

$$W_{12}^{21} = \frac{\partial^2 W}{\partial p_1 \partial p_2 \partial \alpha_1 \partial \alpha_2}$$

ist. Dann können wir die Gleichungen 396) so schreiben

$$399) \quad W^h = \beta_h,$$

wogegen die  $q$  aus den Gleichungen

$$400) \quad W_h = q_h$$

folgen.

Wollen wir die in 398) vorkommende Größe  $\partial \alpha_k / \partial p_h$  bestimmen, so haben wir  $p_h$  und  $dp_h$  wachsen zu lassen; dagegen alle übrigen  $p$  und alle  $q$  und  $t$  als Konstanten anzusehen. Sämtliche  $\alpha$  werden sich dabei verändern.  $d\alpha_h$  sei der Zuwachs von  $\alpha_h$ . Es folgt daher aus 400)

$$401) \quad \begin{cases} W_1^1 d\alpha_1 + W_1^2 d\alpha_2 \dots W_1^s d\alpha_s + W_{1h}^h dp_h = 0 \\ W_2^1 d\alpha_1 + W_2^2 d\alpha_2 \dots W_2^s d\alpha_s + W_{2h}^h dp_h = 0 \\ \dots \dots \dots \\ W_s^1 d\alpha_1 + W_s^2 d\alpha_2 \dots W_s^s d\alpha_s + W_{sh}^h dp_h = 0. \end{cases}$$

Setzen wir

$$402) \quad \Delta = \begin{vmatrix} W_1^1 & W_1^2 & \dots & W_1^s \\ W_2^1 & W_2^2 & \dots & W_2^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_s^1 & W_s^2 & \dots & W_s^s \end{vmatrix}$$

und bezeichnen die Unterdeterminante nach  $W_h^k$  mit  $\Delta_h^k$ , setzen also

$$403) \quad \Delta_h^k = \frac{\partial \Delta}{\partial W_h^k},$$

so folgt aus 401)

$$\frac{d\alpha_k}{dp_h} = - \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{i=s} W_{ih}^i \Delta_i^k.$$

Hier ist aber  $d\alpha_k$  derjenige Zuwachs des  $\alpha_k$ , der entstand, indem nur  $p_h$  und  $dp_h$  wuchs, während die übrigen  $p$  und alle  $q$  konstant blieben. Es ist also die so berechnete Größe  $d\alpha_k/dp_h$  das, was in 398) mit  $\partial\alpha_k/\partial p_h$  bezeichnet wurde und man hat

$$404) \quad \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_h} = - \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^s \Delta_i^k W_{ih}^i.$$

Will man  $\partial\alpha_k/\partial q_h$  finden, so sind alle  $p$  und alle  $q$  außer  $q_h$  konstant zu lassen. Daher folgt aus 400)

$$W_1^1 d\alpha_1 + W_1^2 d\alpha_2 \dots W_1^s d\alpha_s = 0$$

.....

$$W_h^1 d\alpha_1 + W_h^2 d\alpha_2 \dots W_h^s d\alpha_s = dq_h$$

$$W_{h+1}^1 d\alpha_1 + W_{h+1}^2 d\alpha_2 \dots W_{h+1}^s ds = 0.$$

.....

Daraus ergibt sich  $d\alpha_k/dq_h$ , also die in 398) mit  $\partial\alpha_k/\partial q_h$  bezeichnete Größe, gleich

$$405) \quad \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_h} = \frac{1}{\Delta} \Delta_h^k.$$

Aus 399) findet man, wenn alle  $p$  konstant sind

$$406) \quad d\beta_k = W^{1k} d\alpha_1 + W^{2k} d\alpha_2 \dots W^{sk} d\alpha_s.$$

Wir wollen nun auch alle  $q$  bis auf  $q_h$  konstant, letzteres aber um  $dq_h$  wachsen lassen. Die Quotienten von  $d\beta_k$  in die dabei entstehenden Zuwächse von  $d\alpha_1, d\alpha_2 \dots$  sind die von uns mit  $\partial\beta_k/\partial q_h, \partial\alpha_1/\partial q_h \dots$  bezeichneten Größen. Die Division von 406) durch  $dq_h$  liefert daher

$$407) \quad \frac{\partial\beta_k}{\partial q_h} = \sum_{i=1}^{i=s} W^{ik} \frac{\partial\alpha_i}{\partial q_h}.$$

Sind endlich alle  $q$  und alle  $p$  bis auf  $p_h$  konstant, welches letztere um  $dp_h$  wächst, so folgt aus 399)

$$d\beta_k = W_h^k dp_h + \sum_1^s W^{ik} d\alpha_i$$

und die Division durch  $dp_h$  liefert

$$408) \quad \frac{\partial\beta_k}{\partial p_h} = W_h^k + \sum_1^s W^{ik} \frac{\partial\alpha_i}{\partial p_h}.$$

Substituieren wir in

$$409) \quad (\alpha_k, \alpha_l) = \sum_{h=1}^{h=s} \left( \frac{\partial\alpha_k}{\partial p_h} \frac{\partial\alpha_l}{\partial q_h} - \frac{\partial\alpha_k}{\partial q_h} \frac{\partial\alpha_l}{\partial p_h} \right)$$

die Werte 404) und 405), so folgt

$$(\alpha_k, \alpha_l) = \frac{1}{d^2} \sum_{h=1}^{h=s} \sum_{i=1}^{i=s} (\Delta_i^k \Delta_h^l - \Delta_h^k \Delta_i^l) W_{ih}.$$

In dieser Doppelsumme ist der Koeffizient von  $W_{hi}$  gleich und entgegengesetzt bezeichnet, wie der von  $W_{ih}$ . Da aber  $W_{hi} = W_{ih}$ , so hebt sich das Glied mit  $W_{hi}$  gegen das mit  $W_{ih}$  und daher heben sich überhaupt je zwei Glieder der Doppelsumme gegenseitig und man hat also

$$410) \quad (\alpha_k, \alpha_l) = 0.$$

Wir wollen nun in den Ausdruck

$$(\alpha_k, \beta_l) = -(\beta_l, \alpha_k) = \sum_{h=1}^{h=s} \left( \frac{\partial\alpha_k}{\partial p_h} \frac{\partial\beta_l}{\partial q_h} - \frac{\partial\alpha_k}{\partial q_h} \frac{\partial\beta_l}{\partial p_h} \right)$$

zunächst nur für

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial q_h} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \beta_i}{\partial p_h}$$

die Werte 407) und 408) substituieren. Es folgt

$$(\alpha_k, \beta_l) = - \sum_{h=1}^{h=s} \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_h} W^l_h + \sum_{i=1}^{i=s} W^{il} \sum_{h=1}^{h=s} \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_h} \frac{\partial \alpha_l}{\partial q_h} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_h} \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_h} \right).$$

Im zweiten Addenden rechts ist die nach  $h$  genommene Doppelsumme nichts anderes als  $(\alpha_k, \alpha_i)$ , verschwindet also nach 410). Im ersten Summanden substituieren wir für  $\partial \alpha_k / \partial q_h$  den Wert 405). Nach einem bekannten Satze der Determinantenlehre ist gemäß der Definitionen 402) und 403)

$$\sum_1^s W^l_h \Delta_h^k$$

gleich Null oder gleich  $\Delta$ , je nachdem  $k$  gleich  $l$  oder davon verschieden ist. Daher ist auch

$$411) \quad \begin{cases} (\alpha_k, \beta_l) = -(\beta_l, \alpha_k) = -1 & \text{für } k = l, \\ (\alpha_k, \beta_l) = -(\beta_l, \alpha_k) = 0 & \text{für } k \neq l. \end{cases}$$

Substituiert man endlich in

$$(\beta_k, \beta_l) = \sum_{h=1}^{h=s} \left( \frac{\partial \beta_k}{\partial p_h} \frac{\partial \beta_l}{\partial q_h} - \frac{\partial \beta_k}{\partial q_h} \frac{\partial \beta_l}{\partial p_h} \right)$$

die Worte 407) und 408), so erhält man drei Glieder.

1. Die dreifache Summe

$$\sum_1^s \sum_1^s W^{ik} W^{jl} \sum_1^s \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_h} \frac{\partial \alpha_j}{\partial q_h} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_h} \frac{\partial \alpha_j}{\partial p_h} \right),$$

welche verschwindet, da die nach  $h$  zu nehmende Summe gleich  $(\alpha_i, \alpha_j)$  ist.

2. Vermöge des nach 408) außerhalb der Summe stehenden Gliedes von  $\partial \beta_k / \partial p_h$  die Doppelsumme

$$\sum_{i=1}^{i=s} W^{il} \sum_{h=1}^{h=s} W^k_h \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_h},$$



welche sich durch Substitution des Wertes 405) unter Anwendung der soeben angewendeten Sätze über Determinanten auf  $W^{ki}$  reduziert.

3. Vermöge des analogen Gliedes von  $\partial \beta_i / \partial p_h$  die Doppelsumme

$$- \sum_{i=1}^{i=s} W^{ik} \sum_{h=1}^{h=s} W_h^i \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_h},$$

welche sich ebenso auf  $-W^{ki}$  reduziert. Es ist also allgemein

$$412) \quad (\beta_k, \beta_i) = 0.$$

Vermöge der Relationen 410), 411) und 412) nehmen die Gleichungen 397) die einfache Form an:

$$413) \quad \frac{d \alpha_k}{d t} = - \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_k}, \quad \frac{d \beta_k}{d t} = \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_k}.$$

### § 73. Integration des Störungsproblems durch eine der Hamiltonschen analoge partielle Differentialgleichung.

Die Konstanten  $\alpha$  in dem vollständigen Integral  $W$  der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung 294) sind irgendwelche Funktionen der Anfangswerte  $p$  der Koordinaten. Wir können sie jedenfalls gleich den  $p$  selbst setzen. Dann wird nach 292)

$$\frac{\partial W}{\partial p_h} = - q_h.$$

Die  $\beta$  werden also gleich den negativen  $q$ . Wir können also in den Gleichungen 413) die  $\alpha$  den  $p$  gleichsetzen. Dann werden die  $\beta$  gleich den negativen  $q$  und erhalten so wieder die Gleichungen 374), von denen wir in der Beweisführung des § 69 ausgingen.

Wir sahen in § 58, daß jedesmal, wenn zwischen den  $2s$  Variablen  $p_1, p_2, \dots, q_s$  Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{d p_h}{d t} = \frac{\partial E}{\partial q_h}, \quad \frac{d q_h}{d t} = - \frac{\partial E}{\partial p_h}$$

bestehen, wobei  $E$  eine beliebige Funktion  $E(p, q, t)$  der  $p, q$  und der Zeit sein kann und keineswegs bezüglich der  $q$  homogen und vom zweiten Grade sein muß, deren Integrale aus einem vollständigen Integrale der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t} + E\left(p, \frac{\partial W}{\partial q}, t\right) = 0,$$

welche der Hamiltonschen vollkommen analog ist, hergeleitet werden können. Dies gilt also auch hier, da die Gleichungen 413) genau die in Rede stehende Form haben. Die entsprechende partielle Differentialgleichung wäre, wenn wir das betreffende  $W$  mit dem Index 1 versehen:

$$414) \quad \frac{\partial W_1}{\partial t} - \Omega = 0$$

wo in  $\Omega$  die  $p$  und  $q$  durch  $t, \alpha$  und  $\beta$  auszudrücken sind und nachher für jedes  $\beta_h$  zu setzen ist  $\frac{\partial W}{\partial \alpha_h}$ .

Nehmen wir an, wir hätten ein vollständiges Integral dieser partiellen Differentialgleichung  $W_1(\alpha_h, \alpha'_h, t)$  gefunden, wobei die  $\alpha'_h$  die  $s$  unabhängigen Integrationskonstanten sind, von denen keine additiv zu  $W$  hinzukommen darf. Dann sind durch die Gleichungen

$$\frac{\partial W_1}{\partial \alpha'_h} = \beta'_h$$

die Integrale der gewöhnlichen Differentialgleichungen 413) gegeben. Die  $\alpha'$  und  $\beta'$  sind die  $2s$  Integrationskonstanten. Übrigens würde nichts hindern, die Rolle der  $\alpha$  und  $\beta$  zu vertauschen. Dann würde

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} + \Omega = 0,$$

die partielle Differentialgleichung und die  $\alpha$  wären durch  $\partial W_1 / \partial \beta$  zu ersetzen.

Man kann übrigens in der folgenden Weise umgekehrt, die partielle Differentialgleichung 414) direkt ableiten, und so  $W_1$  durch die früher eingeführten Funktionen ausdrücken.

Sei  $W_0$  ein vollständiges Integral der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} + E = \frac{\partial W_0}{\partial t} + T + V = 0$$

für das ungestörte Problem.  $\alpha$  seien die  $s$  Konstanten desselben.

$$415) \quad \frac{\partial W_0}{\partial \alpha_h} = \beta_h$$

seien die Integrale der Gleichungen 386) des ungestörten Problems, die entsprechenden  $q$  sind durch die Gleichungen

$$416) \quad \frac{\partial W_0}{\partial p_h} = q_h$$

gegeben. Es sei nun  $W$  die Wirkungsfunktion für das variierte Problem, also

$$\frac{\partial W}{\partial t} + E + \Omega = 0,$$

wobei  $W$  als Funktion von  $t$ ,  $p$  und deren Anfangswerte  $p^0$  ausgedrückt zu denken ist. Dann ist bei konstanten  $p^0$

$$417) \quad \frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} dt + \sum \frac{\partial W}{\partial p_h} dp_h = -(E + \Omega) dt + \sum q_h dp_h.$$

Es sollen nun in den Gleichungen 415) die  $\alpha$  und  $\beta$  gleich solchen Funktionen der Zeit gesetzt werden, daß die daraus folgenden Werte von  $p$  die Lösungen der Gleichungen 387) für das gestörte Problem sind. Setzt man in  $W_0$  ebenfalls  $\alpha$  und  $\beta$  gleich diesen Funktionen der Zeit, so soll es in  $\bar{W}_0$  übergehen, was keineswegs mit  $W$  identisch ist, da  $\bar{W}_0$  die Größe ist, in welche

$$\int_{t_0}^t (T + V) dt$$

übergeht, wenn man vor Ausführung der Integration darin die  $p$  und  $q$  aus den Gleichungen 415) und 416) entnimmt, und dabei  $\alpha$  und  $\beta$  konstant betrachtet und erst nach Aus-

führung der Integration  $\alpha$  und  $\beta$  gleich den betreffenden Funktionen der Zeit setzt, wogegen in

$$W = \int_{t_0}^t (T + V + \Omega) dt$$

die  $p$  und  $q$  zwar auch den Gleichungen 415) und 416) zu entnehmen, aber schon vor Ausführung der Integration die  $\alpha$  und  $\beta$  als Funktionen der Zeit zu betrachten sind. Es folgt

$$d\bar{W}_0 = \frac{\partial W_0}{\partial t} dt + \sum_1^s \frac{\partial W_0}{\partial p_h} dp_h + \sum_1^s \frac{\partial W_0}{\partial \alpha_h} d\alpha_h$$

und da die Gleichungen 415) und 416) bei konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  genau ebenso wie bei variablen aussehen

$$d\bar{W}_0 = -E dt + \sum_1^s q_h dp_h + \sum_1^s \beta_h d\alpha_h.$$

Subtrahiert man hiervon die Gleichung 417), so folgt also

$$d(\bar{W}_0 - W) = \Omega dt + \sum_1^s \beta_h d\alpha_h.$$

Bezeichnen wir nun die Differenz  $\bar{W}_0 - W$  mit  $W_1$ , so folgt aus der letzten Gleichung:

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} = \Omega, \quad \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_h} = \beta_h.$$

Drückt man in der ersten dieser Gleichungen  $\Omega$  durch  $t$  und die  $\alpha$  und  $\beta$  aus und substituiert statt der  $\beta$  wieder  $\frac{\partial W_1}{\partial \alpha}$ , so hat man wieder die partielle Differentialgleichung, welche der Hamiltonschen vollkommen analog ist.

#### V § 74. Anwendung auf die Astronomie.

Wir haben schon in § 67 bemerkt, daß wir alle physikalischen Probleme ohne Ausnahme nur angenähert zu lösen vermögen, so daß der Fall die Regel bildet, daß größere

Annäherungen an die Wirklichkeit nach einer Methode gefunden werden müssen, welche dem Wesen nach mit der eben entwickelten Störungsrechnung übereinstimmt. Die höchste Vollendung hat aber diese Störungsrechnung in der Astronomie gefunden und es sei daher hier gestattet, die Grundprinzipien der astronomischen Störungstheorie gewissermaßen als typisches Beispiel zu entwickeln.

Wir betrachten zu diesem Behufe die Sonne samt allen Planeten und stellen uns die Aufgabe, die Störungen zu berechnen, welche die Bahn eines derselben (wir wollen ihn Kürze halber den Mars nennen) durch die übrigen Planeten erfährt. Wir betrachten sämtliche Himmelskörper als materielle Punkte von bestimmter Masse, welche nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze aufeinander wirken. Wir beziehen sie zunächst auf ein fest mit dem Fixsternhimmel verbundenes Koordinatensystem. Sei  $m_s$  die Sonnenmasse,  $\xi_s, \eta_s, \zeta_s$  ihre rechtwinkligen Koordinaten zu einer bestimmten Zeit  $t$ . Dieselben Größen sollen zur selben Zeit für den Mars die Werte  $m_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$ , für die anderen Planeten  $m_1, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, m_2, \xi_2, \eta_2, \zeta_2 \dots m_n, \xi_n, \eta_n, \zeta_n$  haben. Ferner sei  $r_{hk}$  die Entfernung der Masse mit dem Index  $h$  und der mit dem Index  $k$  und  $\kappa$  die Gravitationskonstante.

Dann können die Bewegungsgleichungen in der Form geschrieben werden

$$\frac{d^2 \xi_h}{dt^2} = - \kappa \sum_{s, 0}^n \frac{(\xi_h - \xi_s) m_s}{r_{hs}^3}.$$

Dabei wurde mit  $m_h$  wegdividiert. Dem  $h$  kann jeder der Werte  $s, 0, 1, 2 \dots n$  erteilt werden und ebenso ist die Summe so zu verstehen, daß dem  $k$  die Werte  $s, 0, 1, 2 \dots n$  zu erteilen sind. Das Glied, für welches  $h = k$  ist, ist aus der Summe wegzulassen. Analoge Gleichungen gelten für die  $y$ - und  $z$ -Achse.

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} \xi_h - \xi_s &= x_h, & \eta_h - \eta_s &= y_h, & \zeta_h - \zeta_s &= z_h \\ \varrho_h &= \sqrt{x_h^2 + y_h^2 + z_h^2} = r_{sh}, \end{aligned}$$

so daß  $\varrho_h$  die Entfernung des Planeten mit der Masse  $m_h$  von der Sonne ist und

$$r_{hk} = \sqrt{(x_h - x_k)^2 + (y_h - y_k)^2 + (z_h - z_k)^2}$$

wird. Dann lautet die auf die  $x$ -Achse bezügliche Bewegungsgleichung für die Sonne

$$\frac{d^2 \xi_s}{dt^2} = -\frac{x m_0 x_0}{\varrho_0^3} + x \sum_1^n \frac{m_k x_k}{\varrho_k^3},$$

die entsprechende Gleichung für den Mars aber lautet

$$\frac{d^2 \xi_0}{dt^2} = -\frac{x m_s x_0}{\varrho_0^3} - x \sum_1^n \frac{m_k (x_0 - x_k)}{r_{0k}^3}.$$

Die Subtraktion der beiden letzten Gleichungen liefert

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} = -\frac{x (m_0 + m_s) x_0}{\varrho_0^3} - x \sum_1^n m_k \left( \frac{x_k}{\varrho_k^3} + \frac{x_0 - x_k}{r_{0k}^3} \right).$$

Analoge Gleichungen gelten für die  $y$ - und  $z$ -Richtung. Wir werden im folgenden den Index Null weglassen, die übrigen Indizes aber unverändert beibehalten, so daß die letzte Gleichung sich so schreibt

$$418) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -x \frac{(m_s + m) x}{\varrho^3} - x \sum_1^n m_k \left( \frac{x_k}{\varrho_k^3} + \frac{x - x_k}{r_k^3} \right)$$

mit zwei analogen, für die  $y$ - und  $z$ -Richtung.

Hier sind  $x, y, z$  die Koordinaten des Planeten, dessen Störung wir bestimmen wollen bezüglich eines Koordinatensystems  $OX, OY, OZ$ , dessen Koordinatenachsen fixe Richtungen im Raume (gegen den Fixsternhimmel) haben, dessen Ursprung aber immer im Sonnenmittelpunkte liegt. Die zeitlichen Änderungen von  $x, y, z$  bestimmen also die Bewegung des Mars relativ gegen die Sonne, also jene Bewegung, welche gerade der Beobachtung zugänglich ist.  $x_k, y_k, z_k$  sind die Koordinaten irgend eines anderen Planeten relativ gegen das Koordinatensystem  $OX, OY, OZ$ , also relativ gegen die Sonne,

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ist die Entfernung des Mars von der Sonne,

$$r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2}$$

die von jenem anderen Planeten,

$$\varrho_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}$$

die jenes anderen Planeten von der Sonne.

Es stellt nun das erste Glied der rechten Seite der Gleichung 418) die ungestörte Bewegung des Mars relativ gegen die Sonne dar, welche genau so erfolgt, wie seine absolute Bewegung im Raume erfolgen würde, wenn die Sonne ein im Raume fixer Zentralkörper von der Masse  $m_s + m$  wäre; die übrigen Glieder aber stellen die Störungen durch die anderen Planeten dar. Alle betreffenden Kräfte haben eine Kraftfunktion. Setzt man nämlich

$$419) \quad V = -\frac{x(m_s + m)}{\varrho}, \quad \Omega = x \sum_k^n m_k \left( \frac{x x_k + y y_k + z z_k}{\varrho_k^3} - \frac{1}{r_k} \right),$$

so kann die Gleichung 415) so geschrieben werden:

$$419a) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}, & \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ & \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial \Omega}{\partial z}. \end{cases}$$

Es ist also  $V$  die Kraftfunktion bei der ungestörten Bewegung,  $\Omega$  die der störenden Kräfte. Wir haben daher folgende beiden Aufgaben zu lösen: 1. Wir haben die ungestörte Bewegung mittels der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung zu bestimmen, wobei wir sechs Integrationskonstanten  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  erhalten. 2. Wir haben statt dieser Konstanten mittels der Gleichungen 418) solche Funktionen der Zeit einzuführen, daß die gestörte Bewegung dargestellt wird.

#### ✓ § 75. Hamilton-Jacobische Methode der Lösung des Zweikörperproblems.

Die erste Aufgabe fällt sachlich zusammen mit der Bestimmung der elliptischen Bahn eines Planeten um die

Sonne, welche wir schon im I. Teile § 21 ausgeführt haben. Wir müssen also hier diese Aufgabe ein zweites Mal nach einer ganz verschiedenen Methode lösen.

Wir bestimmen die Lage des in Betracht kommenden Planeten  $M$  (des Mars) im Raume in folgender Weise. Wir denken uns die Sonne  $S$  im Mittelpunkte des kugelförmigen Himmelsgewölbes und die Ekliptik als größten Kreis des letzteren. Daß die Lage dieses größten Kreises so gewählt wird, daß die (natürlich ebenfalls gestörte) Erdbahn zu einer gewissen Zeit in seine Ebene fällt, ist für unsere Rechnungen unwesentlich. Nur daß alle Planeten sich nicht allzu weit von dieser Ebene entfernen, wird benutzt. Der größte Kreis der Himmelskugel, welcher durch den Pol der Ekliptik und den Planeten  $M$  geht, treffe die Ekliptik im Punkte  $N$ . Der Winkelabstand dieses Punktes vom Frühlingspunkte (die Länge des Planeten) heiße  $\varphi$ , der Winkel  $MSN$  (die Breite des Planeten) heiße  $\vartheta$  (vergl. Fig. 10 S. 298). Dann sind  $\varrho$ ,  $\vartheta$  und  $\varphi$  gewöhnliche Polarkoordinaten. Die Formeln 419 a) zeigen, daß die Bewegung des Mars relativ gegen die Sonne genau so vor sich geht, wie dessen absolute im Raume geschähe, wenn seine Masse gleich eins wäre und  $V$  resp.  $\Omega$  die Kraftfunktionen für die ungestörte Bewegung resp. die der störenden Kräfte wären. Es genügt daher das letztere Problem zu lösen. Für dasselbe wäre die oben-  
dige Kraft

$$T = \frac{1}{2} [\varrho'^2 + \varrho^2 \vartheta'^2 + \varrho^2 \cos^2 \vartheta \varphi'^2]$$

(vgl. § 11, wo  $r$  für  $\varrho$  und  $90^\circ - \vartheta$  für  $\vartheta$  geschrieben ist).

Daraus ergibt sich

$$q_1 = \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \varrho', \quad q_2 = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = \varrho^2 \vartheta', \quad q_3 = \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \varrho^2 \cos^2 \vartheta \varphi',$$

daher

$$T = \frac{1}{2} \left[ q_1^2 + \frac{q_2^2}{\varrho^2} + \frac{q_3^2}{\varrho^2 \cos^2 \vartheta} \right].$$

Setzt man  $\kappa(m_s + m) = \lambda$ , so wird also

$$V = -\frac{\lambda}{\varrho}, \quad E = T - \frac{\lambda}{\varrho}.$$



Die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung  $\frac{\partial W}{\partial t} + E = 0$  lautet also, wenn man für  $E$  den Wert  $T - \frac{\lambda}{\varrho}$  und darin für  $q_1, q_2, q_3$  die Ausdrücke  $\frac{\partial W}{\partial \varrho}, \frac{\partial W}{\partial \vartheta}$  und  $\frac{\partial W}{\partial \varphi}$  substituiert, wie folgt:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial \varrho} \right)^2 + \frac{1}{\varrho^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{1}{\varrho^2 \cos^2 \vartheta} \left( \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 \right] - \frac{\lambda}{\varrho} = 0.$$

Ein vollständiges Integrale dieser partiellen Differentialgleichung finden wir folgendermaßen: Wir setzen

$$W = \alpha_1 t + \alpha_2 \varphi + P + \Theta,$$

wobei  $P$  nur Funktion von  $\varrho$ ,  $\Theta$  nur Funktion von  $\vartheta$  sein soll. Dadurch nimmt die partielle Differentialgleichung die Gestalt an:

$$\alpha_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dP}{d\varrho} \right)^2 + \frac{1}{2\varrho^2} \left( \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{2\varrho^2 \cos^2 \vartheta} - \frac{\lambda}{\varrho} = 0,$$

welcher genügt wird, wenn man setzt

$$\left( \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right)^2 = \alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \vartheta}, \quad \left( \frac{dP}{d\varrho} \right)^2 = \frac{2\lambda}{\varrho} - 2\alpha_1 - \frac{\alpha_3^2}{\varrho^2}.$$

Bezeichnet man mit  $\vartheta_1$  und  $\varrho_1$  die unteren Integrationsgrenzen, welche wir nach Belieben wählen können, so wird also

$$\Theta = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} d\vartheta \sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \vartheta}}, \quad P = \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho} \sqrt{2\lambda\varrho - 2\alpha_1\varrho^3 - \alpha_3^2}.$$

$$420) \quad \left\{ \begin{aligned} W &= \alpha_1 t + \alpha_2 \varphi + \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} d\vartheta \sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \vartheta}} + \\ &\quad + \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho} \sqrt{2\lambda\varrho - 2\alpha_1\varrho^3 - \alpha_3^2}. \end{aligned} \right.$$

Die drei Integrale der Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} = \beta_3$$

verwandeln sich daher in:

$$421) \quad \beta_1 = t - \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{\varrho \, d\varrho}{\sqrt{2\lambda\varrho - 2\alpha_1\varrho^2 - \alpha_3^2}}$$

$$422) \quad \beta_2 = \varphi - \alpha_2 \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta \sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \vartheta}}}$$

$$423) \quad \beta_3 = \alpha_3 \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \vartheta}}} - \alpha_3 \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d\varrho}{\varrho \sqrt{2\lambda\varrho - 2\alpha_1\varrho^2 - \alpha_3^2}}$$

Aus dem zweiten folgt

$$424) \quad d\varphi = \alpha_2 \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta \sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \vartheta}}}$$

Ist daher  $\alpha_2 = \alpha_3$ , so ist  $\vartheta$  immer gleich Null und die Bahn des Planeten fällt genau in die Ekliptik. In allen anderen Fällen muß  $\alpha_2 < \alpha_3$  sein. Nun bewegen sich aber alle Planeten in Bahnen, die der Ekliptik nahe liegen, um die Sonne. Es wächst also  $\varphi$  fortwährend,  $\vartheta$  dagegen schwankt zwischen einem positiven und negativen Werte, also, da der Grenzwert von  $\vartheta$  nur eintreten kann, wenn die Wurzel der Formel 424) verschwindet, zwischen dem kleinsten positiven und den dem Zahlenwerte nach kleinsten negativen Winkel, dessen Kosinus gleich  $\alpha_2/\alpha_3$  ist. Dieser Winkel ist aber der Winkel  $\psi$  zwischen der Bahnebene des Planeten und der Ekliptik. Es ist also

$$425) \quad \cos \psi = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}.$$

$\vartheta$  nimmt jedenfalls auch den Wert Null an, wir können daher  $\varphi_1 = 0$  setzen.

Aus Formel 421) erhalten wir

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{1}{\varrho} \sqrt{2\lambda\varrho - 2\alpha_1\varrho^2 - \alpha_3^2}.$$

Für das Perihel und Aphel verschwindet  $d\varrho/dt$ . Ist also  $\varrho_1$  die Perihel-,  $\varrho_2$  die Apheldistanz des Planeten (Mars) von der Sonne, so sind diese Größen die Wurzeln der Gleichung

$$\varrho^2 - \frac{\lambda}{\alpha_1} \varrho + \frac{\alpha_3^2}{2\alpha_1} = 0.$$

Es ist also

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \frac{\lambda}{\alpha_1}, \quad \varrho_1 \varrho_2 = \frac{\alpha_3^2}{2\alpha_1}.$$

$\varrho_1$  soll zugleich in den Integralen 420) bis 423) als untere Grenze für  $\varrho$  gewählt werden. Wenn wir dann mit  $\tau$  eine der Zeiten bezeichnen, wann der Planet (Mars) das Perihel passiert, folgt aus Gleichung 421)

$$426) \quad \beta_1 = \tau.$$

Ist nun  $a$  die große,  $b$  die kleine Halbachse der Bahnellipse des Mars,  $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$  die Exzentrizität dieser Ellipse, so folgt

$$\varrho_1 = a(1 - e), \quad \varrho_2 = a(1 + e), \quad \varrho_1 + \varrho_2 = 2a, \quad \varrho_1 \varrho_2 = a^2(1 - e^2),$$

daher

$$\alpha_1 = \frac{\lambda}{2a}, \quad \alpha_3 = \sqrt{\lambda a(1 - e^2)} = \sqrt{\lambda p},$$

wobei  $p$  der Parameter, die zum Brennpunkte gehörige Ordinate der Bahnellipse ist.

Wir wollen uns nun in Fig. 10 die Lage der verschiedenen Punkte auf der Himmelskugel versinnlichen.

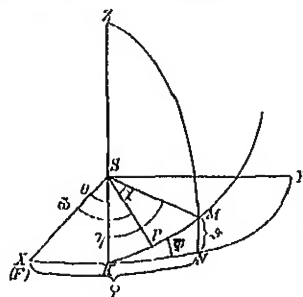


Fig. 10.

$XY$  sei die Ekliptik,  $X$  der Frühlingspunkt,  $Z$  der Pol der Ekliptik,  $K$  der aufsteigende Knoten der Marsbahn,  $P$  das Perihel des Mars,  $M$  der Punkt, wo sich der Mars zu irgend einer Zeit  $t$  befindet. Dann sind  $\angle XSN = \varphi$  und  $\angle MSN = \theta$  die Polarkoordinaten des Mars  $M$  zur Zeit  $t$ ,  $\angle MKN = \psi$  ist die Neigung der Marsbahn gegen die

Ekliptik,  $\angle XSK = 0$  ist die Länge des aufsteigenden Knotens der Marsbahn.

Bezeichnen wir den Winkel  $KSM$  mit  $\eta$ , so folgt aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke  $MKN$

$$427) \quad \sin \vartheta = \sin \psi \sin \eta$$

und wir können, da  $\psi$  konstant ist, in dem ersten Integrale der Gleichung 423)  $\eta$  statt  $\vartheta$  als Integrationsvariable einführen. Da  $\cos \psi = \alpha_2/\alpha_3$  war und wir  $\vartheta_1 = 0$  wählten, so wird dieses Integral

$$\alpha_3 \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \vartheta}}} = \eta$$

und die Gleichung 423) geht über in

$$428) \quad \beta_3 = \eta - \alpha_3 \int_{c_1}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\vartheta \sqrt{2\lambda \vartheta - 2\alpha_1 \vartheta^2 - \alpha_3^2}}$$

Da man für den aufsteigenden Knoten  $K$  hat  $\vartheta = 0$ , so folgt aus 422)

$$\beta_2 = 0$$

und aus 428) folgt

$$\beta_3 = \eta_P,$$

wobei  $\eta_P$  der dem Perihel der Marsbahn zugehörige Wert des  $\eta$  ist. In der Astronomie nennt man die Summe  $\vartheta + \eta_P$  die Länge  $\omega$  des Perihels der Marsbahn, den Winkel  $MSP$  die wahre Anomalie  $\chi$  des Mars zur Zeit  $t$ ,  $\eta + \vartheta = \omega + \chi$  seine in der Bahn gemessene Länge,  $\varphi$  aber seine in der Ekliptik gemessene Länge. Es ist also

$$\beta_3 = \eta_P = \omega - \vartheta$$

$$\chi = \eta + \vartheta - \omega = \eta - \eta_P.$$

Zwischen den sechs Integrationskonstanten

$$429) \quad a, e, \psi, \tau, \vartheta, \omega$$

und

$$430) \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$$

bestehen also die Gleichungen:

$$\alpha_1 = \frac{\lambda}{2a}, \quad \alpha_2 = \cos \psi \sqrt{\lambda a (1 - e^2)}, \quad \alpha_3 = \sqrt{\lambda a (1 - e^2)} = \sqrt{\lambda p}.$$

$$481) \quad \beta_1 = \tau, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = \bar{\omega} - \theta$$

$$a = \frac{\lambda}{2\alpha_1}, \quad e^2 = 1 - \frac{2\alpha_1\alpha_3^2}{\lambda^2}, \quad \cos \psi = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}.$$

Die beiden Konstanten  $\theta$  und  $\psi$  bestimmen die Lage der Bahnebene jedes beliebigen Planeten,  $\bar{\omega}$  bestimmt dann die Richtung nach dem Perihel,  $\tau$  die Durchgangszeit durch das Perihel.

Wie man dann mittels  $a, e$  den wirklichen Ort des Planeten im Räume zu jeder Zeit finden kann, sahen wir schon im I. Teile § 21. Man führt die mittlere Anomalie ein, indem man in Gleichung 421) setzt

$$482) \quad \varrho = a(1 - e \cos u).$$

Die Integration liefert

$$483) \quad \frac{\lambda}{\sqrt{a^3}}(t - \tau) = u - e \sin u.$$

Ist  $t$  gegeben, so wird zunächst aus dieser Gleichung das dazu gehörige  $u$  bestimmt; Gleichung 482) liefert dann  $\varrho$ . Die Einführung des Wertes 432) in 427) und Ausführung der Integration aber liefert:

$$\chi = \eta + \theta - \bar{\omega} = 2 \arctg \left( \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right).$$

Aus dem Werte von  $\eta$  aber findet man  $\vartheta$  mittels der Gleichung 427), während das sphärische Dreieck  $MKN$  der Fig. 10 liefert:

$$\operatorname{tg}(\varphi - \theta) = \cos \psi \operatorname{tg} \eta.$$

Es sind also sämtliche Polarkoordinaten  $\varrho, \vartheta, \varphi$  und daher auch die rechtwinkligen  $x, y, z$  als Funktionen von  $t, a, e, \psi, \tau, \theta$  und  $\bar{\omega}$ , daher vermöge der Gleichungen 481) auch als Funktionen von  $t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  gefunden.

### § 76. Gleichungen für die Störung der Bahn eines Planeten durch die übrigen.

In erster Annäherung geschieht nun die Bewegung des Mars in der Nähe einer gegebenen Zeit  $t$  in einer olliptischen Bahn mit gewissen Werten der Konstanten 420), daher auch

der Konstanten 430). Die Störungen kann man so auffassen, als ob die Werte dieser Konstanten langsam geändert würden und es liefern die Gleichungen 413):

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_1}{dt} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_1}, & \frac{d\alpha_2}{dt} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_2}, & \frac{d\alpha_3}{dt} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_3}, \\ \frac{d\beta_1}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1}, & \frac{d\beta_2}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2}, & \frac{d\beta_3}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_3}.\end{aligned}$$

Nun folgt aus den Gleichungen 431):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_1} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \tau}, & \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_2} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \beta_2} + \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\omega}} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \beta_2} = \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} + \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\omega}}, \\ & \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_3} = \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\omega}}, \\ \frac{d\alpha}{dt} &= -\frac{\lambda}{2\alpha_1^2} \frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{2\alpha^2}{\lambda} \frac{\partial \Omega}{\partial \tau}, \\ \frac{d\epsilon}{dt} &= -\frac{\alpha_2^2}{\lambda^2 e} \frac{d\alpha_1}{dt} - \frac{2\alpha_1^2}{\lambda^2 e} \frac{d\alpha_2}{dt} = -\frac{p}{\lambda e} \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{1}{\alpha e} \sqrt{\frac{p}{\lambda}} \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\omega}}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{1}{\alpha_0 \sin \psi} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} + \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\omega}} \right) - \frac{\alpha_2}{\alpha_0^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\omega}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda p \sin \psi}} \left[ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} + (1 - \cos \psi) \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\omega}} \right],\end{aligned}$$

ferner ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1} &= \frac{\partial \Omega}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} = \\ &= -\frac{\lambda}{2\alpha_1^2} \frac{\partial \Omega}{\partial a} - \frac{\alpha_2^2}{\lambda^2 e} \frac{\partial \Omega}{\partial e} = -\frac{2\alpha^2}{\lambda} \frac{\partial \Omega}{\partial a} - \frac{p}{e\lambda} \frac{\partial \Omega}{\partial e}.\end{aligned}$$

Analog folgt

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2} = -\frac{1}{\sqrt{\lambda p \sin \psi}} \frac{\partial \Omega}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_0} = -\frac{1}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{\lambda}} \frac{\partial \Omega}{\partial e} + \frac{\cot \psi}{\sqrt{\lambda p}} \frac{\partial \Omega}{\partial \psi},$$

daher

$$\begin{aligned}\frac{d\tau}{dt} &= -\frac{2\alpha^2}{\lambda} \frac{\partial \Omega}{\partial a} - \frac{p}{e\lambda} \frac{\partial \Omega}{\partial e}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{\lambda p \sin \psi}} \frac{\partial \Omega}{\partial \psi}, \\ \frac{d\tilde{\omega}}{dt} &= \frac{d\beta_2}{dt} + \frac{d\beta_3}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{\lambda p}} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial \psi} - \frac{1}{\alpha e} \sqrt{\frac{p}{\lambda}} \frac{\partial \Omega}{\partial e}.\end{aligned}$$

Hiermit sind sämtliche Störungsformeln berechnet. In der Astronomie bezeichnet man gewöhnlich den Faktor von  $t - \tau$  in Gleichung 433) mit  $n$  und führt statt  $\lambda$  die Konstante  $n$  mittels der Gleichung  $\lambda = n\sqrt{a^3}$  ein.

Berechnet man nur die Störungsglieder erster Ordnung so addieren sich die von den verschiedenen Himmelskörpern bewirkten Störungen. Um die Störung des Mars durch einen anderen Planeten (den Jupiter) zu berechnen, braucht man im Ausdrucke 419) für  $\Omega$  nur ein Glied beizubehalten, hat also

$$\Omega = \frac{x m_1 (x x_1 + y y_1 + z z_1)}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}^3} - \frac{x m_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}}.$$

Hier sind sowohl die Koordinaten  $x, y, z$  des Mars, als auch die Koordinaten  $x_1, y_1, z_1$  des Jupiter in der früher auseinandergesetzten Weise durch  $t$  und die Werte der Größen 429) auszudrücken, welche für den betreffenden Planeten gelten. Bei der partiellen Differentiation nach den für den Mars geltenden Größen 429) ist  $t$  als konstant anzusehen. Die für den Jupiter geltenden Werte der Größen 429) sind bei Berechnung der Glieder erster Ordnung überhaupt als konstant zu betrachten, so daß  $\Omega$  bloß als Funktion von  $t$  und den für den Mars geltenden Größen 429) ausgedrückt erscheint. Erst bei Berechnung der Störungsglieder höherer Ordnung müßte auch berücksichtigt werden, daß sich die Jupiterbahn, während derselbe störend wirkt, selbst ebenfalls langsam ändert.

## VII. Gleichungen für die relative Bewegung.

### § 77. Absolute und relative Bewegung.

Wir können bloß die Abstände der Teile der verschiedenen Körper voneinander, also bloß deren relative Lage bestimmen. Es gibt keine Erfahrung, in der sich ein absoluter Raum bemerkbar machen würde. Trotzdem haben

wir zu Anfang des I. Teiles ein bestimmtes Koordinatensystem eingeführt, welches nahezu die Rolle eines absoluten Raumes spielt. Wir taten dies bloß, weil sich bei Einführung dieses bestimmten Koordinatensystems die Gesetze für die relative Bewegung der Körper viel einfacher aussprechen lassen, als bei Einführung anderer ganz willkürlich gewählter Koordinatensysteme.

Wir wollen damit keineswegs die Wahrscheinlichkeit oder gar die Notwendigkeit behaupten, daß noch neue Erfahrungen gefunden werden könnten, mittels deren dieses besondere Koordinatensystem sich näher bestimmen ließe, oder welche eine Auswahl eines bestimmten, aus allen den Systemen, welche wir in § 11 des I. Teiles taugliche Bezugssysteme nannten und damit die Bestimmung eines absoluten Raumes gestatten, welche, wie man sich ausdrückt, die Existenz des absoluten Raumes beweisen würden.

Wir sahen nämlich in § 11 des I. Teiles, daß diese Reduktion der Bewegungsgesetze auf die einfachste Form keineswegs bloß bei Zugrundelegung eines einzigen bestimmten Koordinatensystems  $S$  eintritt, sondern daß man mit gleichem Erfolge sehr verschiedene Koordinatensysteme zugrunde legen kann. Alle diese Koordinatensysteme nannten wir dort taugliche Bezugssysteme. Die Richtung der Achsen im Raume kann dabei für einen bestimmten Zeitmoment und die Lage des Koordinatenanfangspunktes für zwei Zeitmomente ganz beliebig relativ gegen das eine schon als taugliches Bezugssystem gefundene Koordinatensystem  $S$  orientiert sein. Hat man jedoch für einen Zeitmoment die Richtung der Achsen gewählt, so ist sie dadurch für alle übrigen Zeitmomente bestimmt. Man bezeichnet alle Richtungen, welche eine bestimmte Achse dann zu allen Zeiten hat, als parallel.

Hat man ferner die Lage des Koordinatenursprungs zu zwei Zeitmomenten gewählt, so ist wieder die Lage des Koordinatenursprungs zu allen übrigen Zeitmomenten bestimmt. Man nennt die Bewegung, welche der Koordinatenursprung hierbei macht, eine geradlinige und gleichförmige.

Die Frage, wie sich die Gesetze der Lagenänderung der Körper modifizieren, d. h. wie sich die Bewegungs-



gleichungen verändern, wenn wir zu den verschiedenen Zeiten Coordinatensysteme zugrunde legen, welche diesen Bedingungen nicht genügen, ist offenbar von hohem theoretischen Interesse.

Sie ist aber auch von praktischem Werte; denn wir beobachten stets nur die Relativbewegung eines materiellen Systems gegen ein zweites, welches nahezu unveränderlich ist oder wenigstens als unveränderlich angesehen wird. So beobachten wir die Bewegung des Planetensystems relativ gegen den Fixsternhimmel, die irdischer Körper relativ gegen die Erde oder irgend welche fix mit ihr verbundene Objekte. Bei gewissen Experimenten beobachten wir auch die Bewegung von Flüssigkeiten oder sonstigen Gegenständen relativ gegen ein absichtlich in Rotation versetztes Gefäß oder Gehäuse. Die in einem bewegten Wagen oder Schiffe befindlichen Personen können die Bewegung ihrer Körper und anderer Gegenstände relativ gegen den Wagen oder das Schiff beobachten usw.

In allen diesen Fällen handelt es sich für uns lediglich um die relative Bewegung des ersten Systems gegen das zweite oder ein mit dem zweiten fix verbundenes Koordinatensystem. Letzteres hat in allen Fällen bis auf den ersten sicher nicht die Eigenschaften eines tauglichen Bezugssystems. Die Natur der Fixsterne ist uns viel zu unbekannt und der Fixsternhimmel selbst ein viel zu unbestimmter Begriff, als daß man mit Sicherheit entscheiden könnte, ob ein mit ihm fix verbundenes Koordinatensystem ein taugliches Bezugssystem wäre; aber Eigenbewegungen von Fixsternen sind bereits konstatiert und jedenfalls ist es auch da von Wichtigkeit zu wissen, was für einen Einfluß es auf die Bewegungsgleichungen des Planetensystems hätte, wenn das zugrunde gelegte Koordinatensystem kein taugliches Bezugssystem wäre.

Wenn die Bewegung eines Körpersystems relativ gegen ein zweites berechnet werden soll und die Bewegung des zweiten Systems relativ gegen ein taugliches Bezugssystem bekannt ist, so könnte man in jedem speziellen Falle so verfahren: man könnte zuerst die Bewegung des ersten

Systeme relativ gegen dasselbe Bezugssystem berechnen und erst dann aus der relativen Bewegung beider Systeme gegen das gemeinsam zugrunde gelegte taugliche Bezugssystem die relative Bewegung des ersten Systems gegen das zweite berechnen.

Es ist aber von großem Vorteile, diese Arbeit nicht in jedem speziellen Falle besonders auszuführen, sondern ein für allemal die Regeln anzugeben, nach denen unmittelbar die Bewegung des ersten Systems relativ gegen das zweite System oder ein damit fix verbundenes Koordinatensystem gefunden werden kann, sobald die des zweiten Systems gegen ein taugliches Bezugssystem gegeben ist, welches wir das ruhende Koordinatensystem nennen. Wir nehmen an, daß sämtliche Teile des zweiten Systems starr miteinander verbunden sind. Mit ihm denken wir uns ein zweites (das bewegliche) Koordinatensystem starr verbunden. Die Aufgabe ist dann, die allgemeinen Gleichungen für die Bewegung des ersten Körpersystems relativ gegen das bewegliche Koordinatensystem zu finden.

#### § 78. Erster Spezialfall. Das bewegliche Koordinatensystem dreht sich nicht.

Wir betrachten nun zuerst den Spezialfall, daß das zweite System, daher auch das damit verbundene bewegliche Koordinatensystem keine Drehung relativ gegen ein taugliches Bezugssystem hat. Die Achsen des letzteren wollen wir mit  $O_1 X_1$ ,  $O_1 Y_1$  und  $O_1 Z_1$  bezeichnen. Die Achsen  $OX$ ,  $OY$  und  $OZ$  des beweglichen fest mit dem zweiten System verbunden Koordinatensystems wollen wir zu irgend einer Zeit den ersteren Koordinatenachsen parallel wählen. Sie werden ihnen dann zu allen Zeiten parallel bleiben und die Lage des beweglichen Koordinatensystems relativ gegen das taugliche Bezugssystem ist zu jeder Zeit bestimmt, wenn wir die Koordinaten  $a, b, c$  ihres Koordinatensprungs  $O$  bezüglich des tauglichen Bezugssystems kennen.

Da sich unserer Annahme gemäß alle Körper kontinuierlich bewegen, so wird auch die Bewegung des Systems,

welches wir das zweite genannt haben, jedenfalls so beschaffen sein, daß  $a, b, c$  kontinuierliche Funktionen der Zeit sind, welche endliche erste und zweite Differentialquotienten haben. Dies soll also angenommen werden, da die entgegengesetzte Annahme keine physikalische Bedeutung hätte. Die Bewegung des zweiten Systems soll uns ferner gegeben sein. Es sollen also  $a, b, c$  bekannte Funktionen der Zeit sein.

Wir bezeichnen mit  $x_1, y_1, z_1$  die auf das taugliche Bezugssystem bezogenen Koordinaten irgend eines materiellen Punktes  $m$  des ersten Systems, dessen Bewegung berechnet werden soll, während die des zweiten Systems und daher auch die der beweglichen Koordinatenachsen als gegeben vorausgesetzt wird.

Vermöge der Definition eines tauglichen Bezugssystems gelten für  $x_1, y_1, z_1$  die gewöhnlichen Gleichungen der Mechanik

$$434) \quad m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2 y_1}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2 z_1}{dt^2} = Z,$$

wobei  $X, Y, Z$  die Komponenten der auf  $m$  wirkenden Gesamtkraft in den drei Koordinatenrichtungen sind.

Diese drei Gleichungen würden uns die Bewegung des materiellen Punktes  $m$  relativ gegen das taugliche Bezugssystem bestimmen. Wir suchen aber nicht dieses, sondern die Bewegung relativ gegen das bewegliche Koordinatensystem, also die Gleichungen für die Veränderungen der Koordinaten  $x, y, z$ , welche dem Massonpunkte  $m$  zukommen, wenn wir ihn auf das bewegliche Koordinatensystem beziehen.

Da die Achsen beider Koordinatensysteme immer parallel bleiben und die Koordinaten des Ursprungs des beweglichen Koordinatensystems bezüglich des tauglichen Bezugssystems  $a, b, c$  sind, so ist

$$x_1 = x + a, \quad y_1 = y + b, \quad z_1 = z + c.$$

Substituiert man dies in die Gleichungen 434), so erhält man

$$485) \quad \left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 x}{dt^2} = X - m \frac{d^2 a}{dt^2}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y - m \frac{d^2 b}{dt^2}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z - m \frac{d^2 c}{dt^2}. \end{array} \right.$$

Dies sind die gewünschten Gleichungen, welche uns die Änderung der Koordinaten  $x, y, z$  eines beliebigen Massenpunktes  $m$  des fraglichen materiellen Systems, dessen relative Bewegung wir finden wollen und welches wir das erste System nannten, bezüglich des beweglichen mit dem zweiten System fix verbundenen Koordinatensystems angeben.

Die Bewegung des ersten Systems relativ gegen das bewegliche Koordinatensystem geschieht also genau so, als ob letzteres ein taugliches Bezugssystem wäre und auf jedes Massenteilchen  $m$  außer den Kräften  $X, Y, Z$ , welche in der Tat darauf wirken, noch die drei Kräfte  $-m d^2 a / dt^2$ ,  $-m d^2 b / dt^2$ ,  $-m d^2 c / dt^2$  in den drei Koordinatenrichtungen wirken würden.

Dadurch haben wir die neue Aufgabe auf eine schon bekannte zurückgeführt. Wir haben die Rechnung ganz so auszuführen, als ob das bewegliche Koordinatensystem ein taugliches Bezugssystem wäre; nur müssen wir den in der Tat wirkenden Kräften noch diese neuen Kräfte hinzufügen, durch deren Hinzufügung sich dann die Bewegungsgleichungen auf die alte uns schon gewohnte Form reduzieren; deshalb nennen wir diese hinzuzufügenden Kräfte die Reduktionskräfte.

Sei umgekehrt die Bewegung des ersten Systems relativ gegen das bewegliche Koordinatensystem gegeben und seien

$$X_1 = X - m \frac{d^2 a}{dt^2}, \quad Y_1 = Y - m \frac{d^2 b}{dt^2}, \\ Z_1 = Z - m \frac{d^2 c}{dt^2}$$

die Kräfte, welche dieselbe Bewegung relativ gegen ein taugliches Bezugssystem erzeugen würden, so sind

$$X = X_1 + m \frac{d^2 a}{dt^2}, \quad Y = Y_1 + m \frac{d^2 b}{dt^2}, \\ Z = Z_1 + m \frac{d^2 c}{dt^2}.$$

die Kräfte, welche die Bewegung relativ gegen das in der vorgeschriebenen Weise bewegte Koordinatensystem erzeugen. Wir müssen daher den Kräften  $X_1, Y_1, Z_1$ , welche diese Bewegung relativ gegen ein taugliches Bezugssystem erzeugen würden, noch die Kräfte  $m \frac{d^2 a}{dt^2}, m \frac{d^2 b}{dt^2}, m \frac{d^2 c}{dt^2}$  hinzufügen, um das System außerdem noch so zu führen, daß es dieselbe Bewegung relativ gegen das in der vorgeschriebenen Weise bewegte Koordinatensystem ausführt, weshalb wir die letzteren hinzuzufügenden Kräfte die Führungskräfte nennen wollen.

Es bestätigt sich neuerdings, daß die Reduktionskräfte nur gleich Null sind, d. h. daß die alte Form der Bewegungsgleichungen ohne Hinzufügung neuer Kräfte nur dann erhalten bleibt, wenn die Bewegung des zweiten Koordinatensystems relativ gegen das erste eine geradlinige und gleichförmige ist.

Wenn jede Masse jedes der beiden Systeme eine gleichgerichtete, der Masse proportionale Kraft wirken würde, so würde dadurch die Relativbewegung beider Systeme gar nicht geändert. Derartige Kräfte wären also für denjenigen, der nur jene beiden Systeme wahrnimmt, nicht bemerkbar. Größe und Richtung der auf die Masseneinheit wirkenden Kraft könnten dabei natürlich noch beliebig mit der Zeit veränderlich sein.

#### § 79. Beispiele.

Als Beispiel für die Reduktionskräfte betrachten wir einen Eisenbahnwagen, welcher in der Richtung der Abszissenachse fährt. Irgend ein bestimmter Punkt desselben habe zur Zeit  $t$  die Abszisse  $a$ . An der Dose sei eine Hängelampe befestigt, auf einem fest mit dem Wagen verbundenen Tischchen stehe ein Glas, das eine Flüssigkeit enthält. So

bald die Geschwindigkeit des Wagens zu- oder abnimmt, bewegt sich die Lampe, sowie die im Glase enthaltene Flüssigkeit eventuell das Glas selbst, wenn es nicht genug Reibung gegen die Tischplatte hat, für einen relativ gegen den Wagen ruhenden Beschauer genau so, als ob zu jeder Zeit auf jedes Massenteilchen außer den in der Tat darauf wirkenden Kräften noch die Kraft  $-m d^2 a / dt^2$  in der Richtung der Bewegung des Wagens wirkte.

Den Begriff der Führungskräfte illustriert folgende Betrachtung: Um in dem besprochenen Eisenbahnwagen einen menschlichen Körper ruhig auf einer Bank sitzend zu erhalten, muß zu den Kräften, welche auch im ruhenden Wagen wirken würden, auf jedes Massenteilchen noch die Kraft  $m d^2 a / dt^2$  in der Bewegungsrichtung des Wagens dazu kommen. Diese Kraft wird von der Rücklehne, dem Sitze eventuell dem Stützpunkte der Füße ausgehen und durch innere Kräfte passend auf die Massenteilchen des Körpers verteilt werden. Die Last wird bei Beschleunigung der Fahrt stärker, bei Verzögerung schwächer auf den Rücken drücken. Bei sehr starker Verzögerung, z. B. sehr plötzlichem Stillstand des Wagens kann der Druck der Lehne auf den Rücken negativ werden; man muß den Rücken mit Gewalt, z. B. die Füße anstemmend, an die Lehne andrücken, wenn der Oberkörper sich nicht nach vorne neigen soll.

Ein anderes Beispiel von Führungskräften ist folgendes. Man hält das eine Ende eines Fadens, den wir als unausdehnbar betrachten wollen, in der Hand; am anderen Ende des Fadens soll ein schwerer Körper befestigt sein. Die Hand soll dasjenige System sein, welches wir in der allgemeinen Theorie das zweite nannten, der schwere Körper soll das erste System sein. Wenn die Hand ruht oder sich gleichförmig bewegt, so muß die Spannung des Fadens, wenn der schwere Körper in relativer Ruhe gegen die Hand bleiben soll, genau gleich dem Gewichte desselben sein. Bewegt sich die Hand mit beschleunigter Bewegung vertikal nach abwärts, so muß auf den schweren Körper, wenn der Faden gleiche Länge behalten soll, eine abwärts wirkende Führungskraft hinzukommen, es muß daher, da dessen Ge-

wicht unverändert bleibt, die aufwärts ziehende Spannung des Fadens abnehmen. Bewegt sich dagegen die Hand verzögert nach abwärts oder beschleunigt nach aufwärts, so muß die Spannung des Fadens wachsen, so daß dieser bei raschem Anhalten einer Abwärtsbewegung oder raschem Beginn einer schnellen Aufwärtsbewegung der Hand reißen kann, selbst wenn seine Festigkeit erheblich größer, als das Gewicht der angehängten Last ist.

√§ 80. Zweiter Spezialfall. Das Koordinatensystem ist in Drehung begriffen.

Wir wollen nun den Spezialfall betrachten, daß das System, welches wir als das zweite bezeichnet haben, keine andere Bewegung hat, als daß es sich um eine in einem tauglichen Bezugssysteme fixe Achse relativ gegen dieses dreht.

Wir wählen die Drehungsachse  $OZ = OZ_1$  zur  $Z$ -Achse,  $OX_1$  und  $OY_1$  seien zwei beliebige andere aufeinander und auf  $OZ = OZ_1$  senkrechte Koordinatenachsen, deren Lage gegen das taugliche Bezugssystem unverändert bleibe, so daß die Koordinatenachsen  $OX_1, OY_1, OZ_1$  selbst ein taugliches Bezugssystem bilden, da sie mit einem solchen fix verbunden sind.

Dagegen seien  $OX, OY$  zwei andere aufeinander und auf  $OZ$  senkrechte, ebenfalls durch den Punkt  $O$  gehende Koordinatenachsen, welche zu irgend einer Zeit (dem Zeit-anfange) mit  $OX_1, OY_1$  zusammenfielen, aber immer mit dem zweiten Systeme fest verbunden mit rotieren, so daß der Winkel  $X_1 OX$  gleich demjenigen Winkel  $\omega$  ist, um welchen sich das zweite System zur betreffenden Zeit relativ gegen ein taugliches Bezugssystem im positiven Sinne gedreht hat. Derselbe soll eine gegebene Funktion der Zeit sein, welche einen endlichen ersten und zweiten Differentialquotienten hat, wodurch die Bewegung des zweiten Systems vollständig gegeben ist.

Wir suchen die Relativbewegung irgend eines anderen Massensystems (des ersten) gegen das zweite, also gegen die Achsen  $OX, OY, OZ$ . Wir haben also die Aufgabe, die Veränderungen der Koordinaten  $x, y, z$  eines beliebigen

Massenteilchens  $m$  des ersten Systems bezogen auf dieses Koordinatensystem zu finden. Wir könnten diese Aufgabe folgendermaßen lösen.

Seien  $x_1, y_1, z_1$  die Koordinaten desselben Massenteilchens bezüglich des Koordinatensystems  $OX_1, OY_1, OZ_1$  und  $X_1, Y_1, Z_1$  die Komponenten der gesamten auf  $m$  wirkenden Kräfte in den Richtungen  $OX_1, OY_1, OZ_1$ ; dann ist, da die letzteren Achsen ein taugliches Bezugssystem bilden

$$436) \quad m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = X_1, \quad m \frac{d^2 y_1}{dt^2} = Y_1, \quad m \frac{d^2 z_1}{dt^2} = Z_1.$$

Da ferner  $w$  der Winkel der beiden  $x$ -Achsen ist, so hat man

$$437) \quad \begin{cases} x_1 = x \cos w - y \sin w, \\ y_1 = x \sin w + y \cos w, \\ z_1 = z. \end{cases}$$

Da  $w$  als Funktion von  $t$  gegeben ist, kann man daraus die zweiten Differentialquotienten von  $x_1, y_1, z_1$  nach der Zeit berechnen. Substituiert man sie in die Gleichungen 436), so ergeben sich daraus nach passenden Reduktionen die Gleichungen für die zweiten Differentialquotienten von  $x, y, z$  nach der Zeit, welche man sucht.

Doch ist dies Verfahren, wenn man es nicht durch Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen abkürzt, wovon später die Rede sein soll, etwas umständlich. Kürzer gelangt man zum Ziele, wenn man Semipolarkoordinaten einführt.

Sei  $r$  der senkrechte Abstand des Massenteilchens  $m$  von der  $x$ -Achse und seien  $\vartheta$  und  $\vartheta_1$  die Winkel, welche  $r$  mit den beiden positiven Abszissenachsen  $OX$  und  $OX_1$  einschließt. Dann sind  $r, \vartheta_1$  und  $z$  gewöhnliche Semipolarkoordinaten zur Bestimmung der Lage bezüglich eines tauglichen Bezugssystems. Wenn wir daher die Richtung der positiven  $x$ -Achse kurz als die  $x$ -Richtung, die Richtung der Verlängerung von  $r$ , welches wir uns immer von der  $x$ -Achse gegen die Masse  $m$  hingezogen denken, als die Richtung von  $r$ , und die auf beiden senkrechte in dem Sinne, in dem sich  $m$  bei wachsenden  $\vartheta$  und  $\vartheta_1$  bewegt, gezogene Richtung



als die Richtung von  $\vartheta$ , und mit  $Z$ ,  $R$  und  $\Theta$  die Komponenten der auf  $m$  wirkenden Gesamtkraft in diesen drei Richtungen bezeichnen, so hat man nach § 11

$$498) \quad \left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 r}{dt^2} - m r \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = R, \\ m r \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + 2 m \frac{d\vartheta}{dt} \frac{dr}{dt} = \Theta, \\ m \frac{d^2 x}{dt^2} = Z. \end{array} \right.$$

Aus diesen Gleichungen, welche uns die absolute Bewegung der Masse  $m$ , d. h. deren Bewegung bezogen auf ein taugliches Bezugssystem geben, finden wir sofort die gesuchte Relativbewegung, wenn wir statt  $\vartheta$ , den Polarwinkel  $\vartheta$  mit der beweglichen Achse  $OX$  einführen, da ja  $r$  und  $x$  von der Drehung nicht affiziert worden. Da wir den Winkel der beiden Abszissenachsen zur Zeit  $t$  mit  $\omega$  bezeichnet haben, so ist, wenn wir die Winkelgeschwindigkeit  $d\omega/dt$  des zweiten Koordinatensystems relativ gegen das taugliche Bezugssystem mit  $\omega$  bezeichnen

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} + \omega, \quad \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \frac{d\omega}{dt}.$$

Substituiert man dies in die Gleichungen 498), so folgt:

$$499) \quad \left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 r}{dt^2} - m r \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = R + m r \omega^2 + 2 m r \omega \frac{d\vartheta}{dt}, \\ m r \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + 2 m \frac{d\vartheta}{dt} \frac{dr}{dt} = \Theta - m r \frac{d\omega}{dt} - 2 m \omega \frac{dr}{dt}, \\ m \frac{d^2 x}{dt^2} = Z. \end{array} \right.$$

### § 81. Interpretation der gefundenen Gleichungen.

Die Gleichungen für die Veränderung von  $r$ ,  $\vartheta$  und  $x$  sind hiermit wieder genau in die Form der Gleichungen 498) gebracht. Die Bewegung relativ gegen das sich drehende Koordinatensystem geschieht also wieder genau so, als ob dasselbe fix (d. h. ein taugliches Bezugssystem) wäre und auf irgend einen materiellen Punkt  $m$  außer den Kräften,

welche tatsächlich darauf wirken, noch folgende Kräfte wirksam wären:

1. Eine Kraft von der Intensität  $mr\omega^2$ , in der Richtung von  $r$ , welche wir die Zentrifugalkraft  $K_1$  nennen wollen.

2. Eine Kraft von der Intensität  $mr d\omega/dt$ , welche der Richtung, die wir die Richtung  $\vartheta$  genannt haben, gerade entgegenwirkt. Diese zweite Kraft wollen wir die tangentialen Reduktionskraft nennen und mit  $K_2$  bezeichnen.

3. Eine Kraft von der Intensität  $2m\omega p$ , wobei  $p$  die Projektion der gesamten Geschwindigkeit  $c$  des materiellen Punktes  $m$  auf die  $xy$ -Ebene ist. Diese dritte Kraft heißt die Coriolissche Kraft  $K_3$ . Ihre Richtung liegt in der  $xy$ -Ebene, steht senkrecht auf der Richtung der mit  $p$  bezeichneten Geschwindigkeitskomponente, also auch auf der Geschwindigkeit  $c$  selbst, und wirkt in dem Sinne, daß ihre Richtung in die Richtung von  $p$  durch eine Drehung in dem Sinne, in dem sich der Bezugskörper dreht, also bei positivem  $\omega$  in demselben Sinne, wie die positive  $x$ -Achse in die positive  $y$ -Achse auf kürzestem Wege übergeführt wird.

Diese drei Kräfte wollen wir wieder die Reduktionskräfte nennen. Fügen wir sie für jeden materiellen Punkt  $m$  des Systems, welches wir das erste genannt haben, den ohnehin darauf wirkenden Kräften bei, so können wir die relative Bewegung dieses Systems gegen die in Drehung begriffenen Koordinatenachsen (oder gegen das damit fest verbundene zweite System) genau so berechnen, als ob dieselben ruhen würden, d. h. ein taugliches Bezugssystem wären.

Was wir unter 1. und 2. von der Zentrifugalkraft  $K_1$  und der tangentialen Reduktionskraft  $K_2$  gesagt haben, lehrt der unmittelbare Anblick der Gleichungen 489). Nur das unter 3. von der Coriolisschen Kraft  $K_3$  Behauptete bedarf noch der Erläuterung. Wenn man die Zentrifugalkraft  $K_1$  und die tangentialen Reduktionskraft  $K_2$  hinzugefügt hat, so muß man, wie der Anblick der Gleichungen 489) lehrt, noch zwei Kräfte hinzufügen, um aus den Gleichungen 489) solche Gleichungen zu erhalten, welche genau

die Form der Gleichungen 438) haben, d. h. damit die Bewegung genau so geschieht, als ob die Achsen  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  ein taugliches Bezugssystem wären.

Diese beiden Kräfte, deren Hinzufügung noch notwendig ist, sind: 1. Die Kraft  $R' = 2m\omega r d\vartheta/dt$  in der Richtung  $r$ . 2. Die Kraft  $\Theta' = -2m\omega dr/dt$  in der Richtung von  $\vartheta$ . Wir haben also noch nachzuweisen, daß die Coriolissche Kraft  $K_s$  in der Tat die resultierende dieser beiden Kräfte ist. Dies geschieht so:  $dr/dt$ ,  $r d\vartheta/dt$  und  $dx/dt$  sind die drei Komponenten der Geschwindigkeiten  $v$  in den drei Richtungen  $r$ ,  $\vartheta$  und  $x$ . Die beiden ersten dieser Größen sind daher die Projektionen der mit  $p$  bezeichneten Geschwindigkeitskomponente in den Richtungen  $r$  und  $\vartheta$ , so daß man hat:

$$\frac{dr}{dt} = p \cos(p, r), \quad r \frac{d\vartheta}{dt} = p \sin(p, r).$$

Daher ist:

$$440) \begin{cases} R' = 2m\omega p \sin(p, r) = 2m\omega p \cos[\angle(p, r) - 90^\circ], \\ \Theta' = 2m\omega p \cos(p, r) = 2m\omega p \sin[\angle(p, r) - 90^\circ], \end{cases}$$

$R'$  und  $\Theta'$  sind also in der Tat die Komponenten einer einzigen Kraft von der Intensität  $K_s = 2m\omega p$ , deren Richtung um  $90^\circ$  gegen die Richtung von  $p$  in dem der Drehung des Bezugskörpers entgegengesetzten Sinne gedreht ist, also in dem Sinne, in welchem man die positive  $y$ -Achse auf kürzestem Wege in die Richtung der positiven  $x$ -Achse drehen kann.

Wenn umgekehrt gewisse Kräfte  $R_1$ ,  $\Theta_1$  eine bestimmte Bewegung bezüglich eines tauglichen Bezugssystems hervorbringen, so müssen ihnen noch die Kräfte  $-K_1$ ,  $-K_2$  und  $-K_3$  zugefügt werden, um dieselbe Bewegung relativ gegen ein sich mit der veränderlichen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  drehendes Koordinatensystem zu erzeugen,  $-K_1$ ,  $-K_2$ , und  $-K_3$  sind also die Führungskräfte, welche den zur Erzeugung einer gewissen Bewegung bezüglich eines ruhenden Koordinatensystems erforderlichen Kräften noch hinzugefügt werden müssen, um jede Masse so zu führen, daß sie dieselbe Bewegung relativ gegen ein sich drehendes Koordinatensystem macht.

## § 82. Weitere Spezialisierung.

Wir können auf das erste materielle System gewisse äußere Kräfte wirkend denken, und nun die Kräfte, welche das zweite System auf das erste ausüben müßte, wenn das zweite ruhte, mit denjenigen vergleichen, welche es auf das erste ausüben muß, wenn sich das zweite in gegebener Weise bewegt, wobei in beiden Fällen dieselbe gegebene Relativbewegung angenommen wird. Die Kräfte, welche im zweiten Falle dazu kommen müssen, sind die Führungskräfte.

Wenn sich das bewegliche Koordinatensystem gleichförmig dreht und jedes Massenteilchen des ersten Systems relativ gegen dasselbe ruht, so verschwinden  $K_2$  und  $K_3$ . Dann muß also das zweite System auf das erste, um die relative Ruhe zu erhalten, genau dieselben Kräfte ausüben, als ob bei gleichen äußeren Kräften beide ruhen würden, aber auf jedes Massenteilchen des ersten Systems noch die Zentrifugalkraft  $K_1$  wirken würde, welche also in diesem Falle die einzige Zusatzkraft ist.

Auf jedes Massenteilchen des ersten Systems muß außer den Kräften, welche bei Ruhe beider Systeme das Gleichgewicht erhalten würden, noch eine der Zentrifugalkraft entgegengesetzte Kraft, die Zentripetalkraft, wirken, welche also die Führungskraft ist, die jedes Massenteilchen des ersten Systems in dem Kreise herumführt, den es bei der Drehung beschreibt.

Sobald die Drehung des zweiten Systems beschleunigt oder verzögert ist, tritt zur Zentripetalkraft noch die der tangentialen Reduktionskraft  $K_2$  entgegengesetzte Kraft hinzu, von der im übrigen das Gleiche gilt wie von der Zentripetalkraft. Doch reichen auch diese beiden Kräfte noch nicht aus, sobald das erste System eine Bewegung relativ gegen das zweite macht. Dann tritt auch noch die der Coriolisschen Kraft  $K_3$  entgegengesetzte auf. Will man den für die Relativbewegung des ersten Systems gegen das bewegliche Koordinatensystem geltenden Gleichungen dieselbe Form geben, als ob dieses ein taugliches Bezugssystem

wäre, so muß man  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  hinzufügen. Zu den Kräften aber, welche das ruhend gedachte zweite System auf das erste ausübt, muß man  $-K_1$ ,  $-K_2$ ,  $-K_3$  hinzufügen, um die Kräfte zu finden, die es bei seiner vorgeschriebenen Bewegung auf das erste ausüben muß, um bei diesem die gleiche Relativbewegung zu unterhalten.

Sei z. B. der Hohlraum eines Gefäßes ein Rotationskörper mit vertikaler Achse, um welche das Gefäß mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in Drehung begriffen sei. Im Gefäß soll sich Quecksilber, Wasser und Öl befinden, eventuell sollen auch feste Körper darin sein. Vernägo der Reibung wird ein stationärer Zustand erst eintreten, wenn alle Flüssigkeiten und feste Körper weder untereinander noch gegen das rotierende Gefäß mehr eine Relativbewegung haben. Das betreffende Gleichgewicht kann genau so berechnet werden, als ob das Gefäß samt seinem Inhalte ruhen würde, aber auf jedes Massenteilchen des letzteren außer der Schwere noch die entsprechende Zentrifugalkraft wirken würde. Dadurch wird auch auf die Gefäßwand im ruhenden Gefäß derselbe Druck erzeugt, welcher im bewegten Gefäß unter dem Einflusse der Schwere allein herrscht.

Ebenso kann das Gleichgewicht eines an einem Faden aufgehängten schweren Körpers, der in gleichförmiger Rotation begriffen ist, genau so gefunden werden, als ob derselbe ruhte und auf jeden Punkt desselben außer der Schwere noch die Zentrifugalkraft wirkte. Vom Widerstande der nur teilweise mitrotierenden Luft ist dabei natürlich abgesehen. Damit dieser nicht stören würde, müßte der Aufhängefaden samt der umgebenden Luft in einem mit gleicher Geschwindigkeit rotierenden Gefäß eingeschlossen sein.

Wenn ein schwerer Körper irgendwo auf der Erde an einer unausdehnbaren oder elastischen Schnur aufgehängt ist und relativ gegen die Erde ruht, so verhält er sich genau so, als ob er samt der Erde ruhte und außer der Anziehung der Erde und der Spannung der Schnur noch die Zentrifugalkraft infolge der Achsendrehung der Erde auf ihn wirkte. Die Schnur nimmt also die Richtung der Resultierenden aus der wirklichen Anziehung der Erde auf den

Körper und der Zentrifugalkraft infolge der Erdrotation an. Diese Richtung heißt die Richtung der scheinbaren Schwere oder der scheinbaren Beschleunigung der Schwere oder kurz die Vertikalrichtung an der betreffenden Stelle der Erdoberfläche. Sie trifft, wenn diese Stelle auf der nördlichen Erdhälfte liegt, die Erdachse nicht im Erdmittelpunkte  $O'$ , sondern südlich davon im Punkte  $O$ . Die Spannung der Schnur, welche den Körper trägt, ist ebenfalls nicht gleich der Anziehungskraft der Erde auf den Körper, sondern der Resultierenden dieser Anziehungskraft und der Zentrifugalkraft. Man nennt diese Resultierende, welche die Spannung der Schnur oder den Druck des schweren Körpers auf seine Unterlage im Falle der relativen Ruhe gegen den Erdkörper stets bestimmt, das scheinbare Gewicht jenes schweren Körpers an dieser Stelle der Erde. Das durch die Masse des Körpers dividierte scheinbare Gewicht nennt man die scheinbare Beschleunigung der Schwere an der betreffenden Stelle der Erde. Wenn ein Körper daselbst frei fällt, d. h. wenn außer der Erdanziehung keine Kraft auf ihn wirkt,<sup>1)</sup> so hat übrigens, wie wir schon werden, seine Beschleunigung relativ gegen die Erde nur in Momenten, wo er gerade die Geschwindigkeit Null relativ gegen die Erde hat, genau die Größe und Richtung der im betreffenden Punkte herrschenden scheinbaren Beschleunigung der Schwere.

Wir werden in der Hydrostatik schon, daß im Falle des Gleichgewichtes die Oberfläche einer Flüssigkeit immer senkrecht zur Resultierenden aller Kräfte stehen muß, die auf ein Teilchen der Oberfläche wirken. Die Meeresfläche muß daher im Zustande der relativen Ruhe gegen die Erde an jedem Orte senkrecht auf der Vertikalrichtung dieses Ortes stehen. Die Erfahrung lehrt, daß auch die Oberfläche des festen Erdkörpers, abgesehen von den gegen die Dimensionen der Erde verschwindend kleinen Erhebungen, Hügeln

<sup>1)</sup> Die durch seine Bewegung und die Erddrehung bedingten Zusatzkräfte sind dabei natürlich nicht zu den auf den Körper wirkenden Kräften gerechnet, da wir sie bloß angieren, um uns die Rechnung zu erleichtern.

und Bergen, senkrecht auf dieser Richtung steht, vielleicht weil dieser zu einer Zeit, wo die Erde schon nahezu dieselbe Umdrehungsgeschwindigkeit hatte, flüssig war, vielleicht auch, weil er noch immer genügend verschiebbar ist, um in so langer Zeit die entsprechende Gestalt anzunehmen. Es ist daher die Erde keine Kugel, sondern nahezu ein an den Polen abgeplattetes Rotationsellipsoid.

### § 88. Wiedereinführung rechtwinkliger Koordinaten.

Wir wollen zunächst in den Gleichungen (489) wieder die rechtwinkligen Koordinaten einführen, welche sich auf die Achsen  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  beziehen, von denen wir schon zu Anfang des § 80 Gebrauch gemacht hatten. Wir können dies am leichtesten, wenn wir bedenken, daß die Bewegung genau so vor sich geht als ob sie relativ gegen ein taugliches Bezugssystem geschähe, wenn wir zu den tatsächlich auf  $m$  wirkenden Kräften, deren Resultierende in den Richtungen der drei Koordinatenachsen  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  die Komponenten  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  haben soll, noch die drei Kräfte  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  hinzufügen, welche alle in der Richtung  $OZ$  die Komponente Null haben. Da  $K_1$  die Richtung von  $r$  hat, so sind  $m\omega^2 x$  und  $m\omega^2 y$  seine Komponenten in den Richtungen  $OX$  und  $OY$ . Da ferner die Kraft  $K_2 = mr d\omega/dt$  auf  $r$  senkrecht steht und nach der früher angegebenen Regel in dem Sinne wirkt, in dem  $\omega$  wächst, so daß wenn  $d\omega/dt$  und die Koordinaten des materiellen Punktes  $m$  positiv sind, ihre  $x$ -Komponente positiv, ihre  $y$ -Komponente aber negativ ist, so sind:  $my d\omega/dt$ ,  $-mx d\omega/dt$  ihre Komponenten in den Richtungen  $OX$  und  $OY$ . Da endlich  $K_3$  senkrecht auf der mit  $p$  bezeichneten Geschwindigkeit steht und für positive Werte von  $dx/dt$  und  $dy/dt$  in der  $x$ -Richtung eine positive, in der  $y$ -Richtung eine negative Komponente hat, so sind  $2m\omega dy/dt$  und  $-2m\omega dx/dt$  seine Komponenten in den Richtungen  $OX$  und  $OY$ . Fügen wir alle diese Kräfte den tatsächlich auf  $m$  wirkenden Kräften  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  bei, so erhalten wir die

gewöhnlichen Bewegungsgleichungen, welche nach Division durch  $m$  folgendormaaßen lauten:

$$441) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \omega}{dt^2} = \frac{1}{m} X + \omega^2 x + y \frac{d\omega}{dt} + 2\omega \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{m} Y + \omega^2 y - x \frac{d\omega}{dt} - 2\omega \frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{m} Z. \end{cases}$$

Sehr leicht findet man diese Gleichungen direkt mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen für generalisierte Koordinaten. Man kann offenbar die Koordinaten  $x, y, z$  der Masse  $m$  relativ gegen das rotierende Koordinatensystem als Variable betrachten, welche dessen Position zu jeder Zeit eindeutig bestimmen und daher Lagranges Gleichungen anwenden, in denen  $x, y, z$  für  $p_1, p_2, p_3 \dots$  zu setzen ist. Aus den Gleichungen 437) folgt:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x' \cos \omega - y' \sin \omega - x \omega \sin \omega - y \omega \cos \omega, \\ y'_1 &= x' \sin \omega + y' \cos \omega + x \omega \cos \omega - y \omega \sin \omega. \end{aligned}$$

Die lebendige Kraft der Masse  $m$  ist

$$T = \frac{m}{2} (x'^2_1 + y'^2_1 + z'^2_1) = m \left[ \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{2} + (x^2 + y^2) \frac{\omega^2}{2} + (xy' - yx') \omega \right].$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \omega} &= m(\omega^2 x + \omega y'), & \frac{\partial T}{\partial y} &= m(\omega^2 y - \omega x'), & \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial x'} &= m(x' - \omega y), & \frac{\partial T}{\partial y'} &= m(y' + \omega x), & \frac{\partial T}{\partial z'} &= m z'. \end{aligned}$$

Die Substitution dieser Werte in die Lagrangeschen Gleichungen, welche in diesem Falle lauten

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial x'} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = X$$

mit zwei analogen für die  $y$ - und  $z$ -Achse liefert sofort die Gleichungen 441).



Es ist dies ein Beispiel für die Anwendung generalisierter Koordinaten, welche die Zeit explizit enthalten, weshalb auch die lebendige Kraft  $T$  hier eine inhomogene quadratische Funktion der  $x', y', z'$  ist.

#### § 84. Grundgleichungen für die Bewegung eines schweren Körpers relativ gegen die rotierende Erde.

Wir wollen nun in Kürze eines der wichtigsten Probleme der Relativbewegung behandeln, nämlich das der Bewegung eines schweren Körpers relativ gegen die in Drehung begriffene Erde. Wir betrachten bloß die Bewegung eines schweren materiellen Punktes von der Masse  $m$  relativ gegen die Erde.

Es sei  $N$  der Nordpol der Erde,  $A$  der auf der nördlichen Hemisphäre gelegene Punkt, wo sich der materielle Punkt  $m$  zu Anfang der Zeit befand. Wir ziehen durch  $A$  ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Die  $A\xi$ -Achse ist der Richtung der scheinbaren Schwere im Punkte  $A$  entgegengesetzt. Die negative  $A\xi$ -Achse schneidet die Erdachse im Punkte  $O$ . Den Winkel  $NOA$  bezeichnen wir mit  $90 - \varepsilon$ , so daß  $\varepsilon$  die geographische Breite von  $A$  ist. Die  $A\eta$ -Achse ist im Punkte  $A$  südlich, die  $A\xi$ -Achse westlich gerichtet. Die Normale vom Punkte  $A$  auf die Erdachse habe den Fußpunkt  $O'$ ,  $AA'$  sei ihre Verlängerung über  $A$  hinaus. Sowohl der Punkt  $A$  als auch die Achsen  $A\xi$ ,  $A\eta$ ,  $A\xi$  sind während der Drehung der Erde fest mit dieser verbunden.

Zu irgend einer Zeit  $t$  habe der Punkt  $m$  die Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  bezüglich dieses Koordinatensystems.  $v$  sei seine Geschwindigkeit relativ gegen die Erde,  $u = \frac{d\xi}{dt}$ ,  $v = \frac{d\eta}{dt}$ ,  $w = \frac{d\zeta}{dt}$  deren Komponenten bezüglich derselben Koordinatenachsen.  $\Xi, H, Z$  seien die Komponenten der Gesamtkraft mit Einschluß der Zentrifugalkraft, welche auf  $m$  wirkt, in den Koordinatenrichtungen, so daß also, wenn nur die Anziehung der Erde wirken würde, im Punkte  $A$  selbst  $\Xi = H = 0$ ,  $-Z$  gleich dem scheinbaren Gewichte  $mg$  der

Masse  $m$  wäre, wenn  $g$  die scheinbare Beschleunigung der Schwere in  $A$  ist.

Wir können die für ruhende Körper geltenden Gleichungen der Mechanik anwenden, wenn wir den Kräften  $\Xi$ ,  $H$ ,  $Z$  noch die Coriolissche Kraft beifügen. Man beweist leicht, daß die Resultierende der durch mehrere Geschwindigkeiten geweckten Coriolisschen Kräfte gleich der durch die Resultierende jener Geschwindigkeiten geweckten Coriolisschen Kraft ist.

Die durch die Geschwindigkeitskomponente  $u$  geweckte Coriolissche Kraft hat die Intensität  $2mu\omega$  und steht auf  $u$  senkrecht in einer zur Erdachse normalen Ebene. Sie hat die Richtung  $AO'$ , da diese durch die Erddrehung auf kürzestem Wege in die positive  $A\xi$ -Richtung übergeht.  $\omega$  ist die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung. Die Komponenten der durch  $u$  geweckten Coriolisschen Kraft in den Richtungen  $A\xi$ ,  $A\eta$ ,  $A\zeta$  sind also Null,  $-2mu\omega\sin\epsilon$ ,  $-2mu\omega\cos\epsilon$ .

Um die durch die Geschwindigkeitskomponenten  $v$  und  $w$  geweckten Coriolisschen Kräfte zu finden, müssen wir diese beiden Geschwindigkeitskomponenten auf eine zur Erdachse senkrechte Ebene projizieren. Die Projektionen sind  $v\sin\epsilon$  und  $w\cos\epsilon$  und haben beide die Richtung  $AA'$ . Die durch sie geweckten Coriolisschen Kräfte haben daher beide die Richtung  $A\xi$  und sind  $2m\omega v\sin\epsilon$  bzw.  $2m\omega w\cos\epsilon$ .

Fügen wir alle diese Coriolisschen Kräfte den Kräften  $\Xi$ ,  $H$ ,  $Z$  bei, so erhalten wir die Bewegungsgleichungen:

$$442) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = \frac{1}{m} \Xi + 2\omega(v\sin\epsilon + w\cos\epsilon), \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} H - 2\omega u\sin\epsilon, \\ \frac{dw}{dt} = \frac{1}{m} Z - 2\omega u\cos\epsilon. \end{array} \right.$$

Man pflegt diese Gleichungen gewöhnlich auf einem anderen Wege abzuleiten. Man wählt zuerst  $O$  als Koordinatenursprung,  $ON$  als positive  $x$ -Achse und legt die  $y$ -Achse durch  $O$  in den geographischen Meridian des Ortes  $A$ . Sind

$x, y, z$  die Koordinaten des Punktes  $m$  zur Zeit  $t$  bezüglich dieses Koordinatensystems, so gelten für  $x, y, z$  die Gleichungen 441). In diese Gleichungen werden dann  $\xi, \eta, \zeta$  durch Koordinatentransformation eingeführt. Die Transformationsgleichungen sind, wie man leicht sieht, die folgenden:

$$443) \begin{cases} \xi = x, & \eta = y \sin \varepsilon - z \cos \varepsilon, & \zeta = y \cos \varepsilon + z \sin \varepsilon - OA, \\ y = \eta \sin \varepsilon + (\zeta + OA) \cos \varepsilon, & x = -\eta \cos \varepsilon + (\xi + OA) \sin \varepsilon, \\ \Xi = X, & H = Y \sin \varepsilon - Z \cos \varepsilon, & Z = Y \cos \varepsilon + Z \sin \varepsilon. \end{cases}$$

Es folgen wieder die Gleichungen 442).

Man hat hierbei einen Vorteil. Die Gravitationswirkung der Erde auf  $m$  hat jedenfalls eine Kraftfunktion  $\varphi$ , welche mit genügender Annäherung als Funktion von  $x$  und  $\sqrt{x^2 + y^2}$  betrachtet werden kann. Wirkt daher nur die Schwere, so sind  $X, Y, Z$  die negativen partiellen Ableitungen 443) von  $\psi = \varphi - \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$  nach den Koordinaten.

Um  $-\Xi, -H, -Z$  zu erhalten aber braucht man bloß in diesen Ausdruck  $\xi, \eta, \zeta$  für  $x, y, z$  einzuführen und dann nach  $\xi, \eta, \zeta$  partiell zu differenzieren.

Man erhält so ganz allgemein die Gleichungen:

$$444) \begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{1}{m} \left( \Xi' - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + 2\omega(v \sin \varepsilon + \omega \cos \varepsilon), \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} \left( H' - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) - 2\omega u \sin \varepsilon, \\ \frac{dw}{dt} = \frac{1}{m} \left( Z' - \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) - 2\omega u \cos \varepsilon, \end{cases}$$

wobei die  $\psi$  enthaltenden Glieder die Wirkung der Schwere und Zentrifugalkraft darstellen,  $\Xi', H', Z'$  aber sind die Komponenten der Kräfte, welche etwa sonst noch auf die Masse  $m$  wirken.

Es läßt sich aber die Funktion  $\psi$  doch nur angenähert ermitteln und wir werden mit der Gleichungen 442) auskommen.

## § 85. Beispiele.

Es möge sich der Punkt  $m$  nur wenig von seiner Ausgangsstelle  $A$  entfernen. Da daselbst die  $A\xi$ -Achse der scheinbaren Schwere entgegengerichtet ist, so ist dort, wenn nur die Schwere wirkt,  $\Xi = H = 0$ ,  $Z = -mg$ . In unmittelbarer Nähe von  $A$  hat man daher die Gleichungen:

$$445) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = 2\omega(v \sin \varepsilon + w \cos \varepsilon), \\ \frac{dv}{dt} = -2\omega u \sin \varepsilon, \\ \frac{dw}{dt} = -g - 2\omega u \cos \varepsilon. \end{cases}$$

1. *Schuß nach Süden.* Der Punkt  $m$  habe zu Anfang eine sehr große horizontale südlich gerichtete Geschwindigkeit  $v$ . Aus der ersten der Gleichungen 445) folgt, daß er allmählich dazu eine westliche Geschwindigkeit  $u = 2\omega t v \sin \varepsilon$  erhält. Er weicht also westlich ab. Erst wenn  $u$  größer geworden ist, wirkt es wieder auf  $v$ , und wenn die Vertikalbewegung länger gedauert hat, wirkt auch sie auf  $u$ ; das erste, was man bemerkt, ist aber die westliche Abweichung. Da ihre Geschwindigkeit  $u$  der Zeit proportional ist, so ist die Westverschiebung  $\xi = \omega t^2 v \sin \varepsilon$  dem Quadrate der Zeit proportional.

Ebenso erfährt ein westlich geworfener Körper eine Norddeviation, ein nördlich geworfener eine Ost- und ein östlich geworfener eine Süddeviation. Man sagt der südlich geworfene Körper kommt in Gegenden, wo die absolute östliche Geschwindigkeit der Punkte der Erdoberfläche infolge der Erdrotation größer ist, bleibt also westlich zurück, wogegen ein nördlich geworfener Körper östlich der darunter befindlichen Erdoberfläche voraneilt.

Ein nach West geworfener Körper aber bewegt sich absolut im Raume in der durch den im Raume fix gedachten Punkt  $A$  gehenden Vertikalebene. Geht dagegen der Punkt mit der Erde mit, so dreht sich die durch  $A$  gehende

Vertikalebene, und zwar ihre westliche Hälfte nach Süd, so daß die alte Vertikalebene nach Nord davon abweicht.

2. *Benzenbergs Fallversuche.* Der Punkt  $m$  falle ohne Anfangsgeschwindigkeit frei. Es ist in erster Annäherung:

$$w = -gt, \quad u = -\omega g t^2 \cos \epsilon, \quad \xi = -\frac{\omega}{\Omega} g t^3 \cos \epsilon.$$

Der Körper fällt also nicht in der Vertikalen (der Richtung eines durch einen ruhenden schweren Körper gespannten Fadens), sondern weicht östlich ab und es ist der Absolutwert der Deviation der dritten Potenz der Fallzeit proportional. Es wäre leicht, die Annäherung weiter zu treiben und die Glieder mit  $\omega^2$  zu berechnen, doch erscheint dies nicht notwendig.

3. *Foucaults Pendel.* Wenn ein langes Pendel nur kleine Exkursionswinkel beschreibt, so kann man es mit genügender Annäherung als einen materiellen Punkt betrachten, welcher sich in der  $\xi\eta$ -Ebene bewegt und auf den immer eine gegen dessen Ruhelage  $A$  wirkende und der Entfernung von derselben proportionale Kraft wirkt. Es ist also in den Gleichungen 442) zu setzen  $w = 0$ ,  $\Xi = -m a^2 \xi$ ,  $H = -m a^2 \eta$ . Diese verwandeln sich daher in

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -a^2 \xi + 2b \frac{d\eta}{dt},$$

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = -a^2 \eta - 2b \frac{d\xi}{dt},$$

wobei  $b = \omega \sin \epsilon$ .

Das allgemeine Integral ist

$$\xi = A \cos(n_1 t + B) + C \cos(n_2 t + D),$$

$$\eta = A \sin(n_1 t + B) - C \sin(n_2 t + D),$$

wobei

$$n_1 = \sqrt{a^2 + b^2} - b, \quad n_2 = \sqrt{a^2 + b^2} + b,$$

oder da  $b$  klein gegen  $a$  ist

$$n_1 = a - b, \quad n_2 = a + b.$$

Die einfachste partikuläre Lösung ist

$$\xi = A [\cos(a - b)t + \cos(a + b)t] = 2A \cos bt \cos at,$$

$$\eta = A [\sin(a - b)t - \sin(a + b)t] = -2A \sin bt \cos at.$$

Das Pendel schwingt daher anfangs westöstlich nach der Zeit  $\frac{\pi}{2b} = \frac{\pi}{2\omega \sin s}$  nordsüdlich, d. h. die Westelongation ist kontinuierlich in eine Nordelongation übergegangen usw. Die Schwingungsebene dreht sich in der Zeit 24 Stunden mal  $\sin s$  um  $360^\circ$  der Erddrehung entgegengesetzt, also genau so, als ob die Lage der Schwingungsebene im Raume fix wäre und sich die Erde mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega \sin s$  darunter hinwegdrehen würde, was die Komponente ihrer Winkelgeschwindigkeit um die Vertikale des Punktes  $A$  als Achse ist. Doch geschieht die Bewegung nur, wenn  $A$  einer der Pole der Erde ist, exakt in dieser Weise. Für alle anderen Lagen bewirken die durch die Vertikalbewegung des Pendels verursachten Deviationen kleine Abweichungen, welche wir mit diesen Vertikalbewegungen vernachlässigt haben.

#### § 86. Bewegung auf einer Niveaufläche der scheinbaren Schwere.

Da die Schwere groß ist gegenüber der Coriolisschen Kraft, so werden, wenn sich die Masse  $m$  weit bewegt, zuerst die Störungen bemerkbar sein, welche dadurch entstehen, daß die Schwere in Richtung und Größe variiert. Ist der Punkt  $m$  gezwungen, sich auf einer Niveaufläche der scheinbaren Schwere zu bewegen, so wird aber diese durch den Gegendruck, welcher ihn hierzu zwingt, immer aufgehoben. Dann kann man also mit größerer Annäherung als sonst die Bahn des Beweglichen aus den Gleichungen 442) berechnen, ohne daß man die Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  zu kennen braucht.

Es soll außer der scheinbaren Schwere und der Kraft, welche den Punkt  $m$  zwingt, auf einer Niveaufläche derselben zu bleiben, keine Kraft wirken. Dann erhält man so lange die Niveaufläche, als eben (mit der  $\xi\eta$ -Ebene zusammen-

(fallend) betrachtet werden darf, aus 442) die beiden Gleichungen:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = 2 \omega \sin \epsilon \frac{d \eta}{dt}, \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} = -2 \omega \sin \epsilon \frac{d \xi}{dt}.$$

Ist für  $t = 0$  z. B.  $\xi = \eta = 0$ ,  $\frac{d \xi}{dt} = u_0$ ,  $\frac{d \eta}{dt} = v_0$ , so liefert die Integration

$$\xi = \frac{v_0}{\sigma} [1 - \cos(\sigma t)] + \frac{u_0}{\sigma} \sin(\sigma t),$$

$$\eta = \frac{u_0}{\sigma} [\cos(\sigma t) - 1] + \frac{v_0}{\sigma} \sin(\sigma t),$$

wobei  $\sigma = 2 \omega \sin \epsilon$ . Die Gleichung der Bahn ist

$$\left(\xi - \frac{v_0}{\sigma}\right)^2 + \left(\eta + \frac{u_0}{\sigma}\right)^2 = \frac{u_0^2 + v_0^2}{\sigma^2}.$$

Dieser ist also ein Kreis vom Radius  $\frac{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}{2 \omega \sin \epsilon}$ . Dies ist der Weg, den ein mit der Geschwindigkeit  $\sqrt{u_0^2 + v_0^2}$  bewegter Körper etwa in  $\frac{2}{\sin \epsilon}$  Stunden zurücklegen würde.

Der ganze Kreis wird in  $\frac{12}{\sin \epsilon}$  Stunden beschrieben, während welcher Zeit die Bewegungshindernisse wohl längst die Geschwindigkeit des Beweglichen aufgezehrt haben. Die früher gefundenen Seitenabweichungen horizontal geworfener Körper sind dadurch bedingt, daß sich diese in Bögen dieses Kreises bewegen. Umgekehrt folgt aus der schon früher gefundenen Tatsache, daß die Seitenabweichung für jede horizontale Wurfbewegung im selben Sinne erfolgt und gleiche Krümmung erzeugt, von selbst wieder die Bewegung im Kreise.

Wollte man die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Niveaufläche der scheinbaren Schwere nicht relativ gegen die Erde, sondern absolut im Raume berechnen, so müßte man bedenken, daß die Schwere allein nicht senkrecht auf der besprochenen Niveaufläche steht, sondern tangential dazu eine Komponente hat, die der der Zentrifugalkraft immer gerade entgegengesetzt ist. Diese Komponente bewirkt, daß ein Körper, welcher gezwungen ist, sich in einer Niveaufläche der scheinbaren Schwere zu bewegen,

wenn er anfangs die Geschwindigkeit hat, welche derselben Stelle des Erdkörpers vermöge der Erdrotation zukommt, sich absolut im Raume nicht in einer geodätischen Linie der Niveaufläche der scheinbaren Schwere, sondern in einem zur Erdachse senkrechten Parallelkreise derselben bewegt. Wenn er eine gleichgerichtete, aber größere oder kleinere Geschwindigkeit hat, erklärt diese Komponente die Seitenabweichung, falls man von der Betrachtung der Absolutbewegung des Körpers ausgeht und diese erst nachher mit der der Erde vergleicht.

### § 87. Allgemeine Gleichungen für die Relativbewegung.

Wir wollen nur noch wenig über den allgemeinen Fall sagen, daß ein beliebiges starres System (das zweite System) eine vollständig beliebige Bewegung macht und die Bewegung eines andern (des ersten Systems) relativ gegen die des zweiten zu berechnen ist.

Wir können die Bewegung des zweiten Systems zusammensetzen aus einer Bewegung eines Punktes  $\Omega$  desselben (des Schwerpunktes oder auch irgend eines anderen Punktes) in einer Kurve und einer Drehung um eine stets durch diesen Punkt gehende Achse, die augenblickliche Drehungsachse, wobei jedoch sowohl die Lage der Achse als auch die Winkelgeschwindigkeit der Drehung sich kontinuierlich mit der Zeit ändern kann. Wir führen ganz wie in § 80 ein fixes Koordinatensystem  $OX, OY, OZ$  und ein bewegliches  $\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta$  ein. Die Achsen des letzteren sollen fix mit dem zweiten Systeme verbunden sein, sein Ursprung soll der besprochene Punkt  $\Omega$  sein.

Was wir suchen, sind die Gleichungen für die Veränderung der Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  irgend eines materiellen Punktes  $m$  des ersten Systems bezüglich des zweiten beweglichen Koordinatensystems, während wir auf die Koordinatenachsen  $x, y, z$  desselben Punktes bezüglich des fixen Koordinatensystems die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen der Mechanik anwenden können. Am raschesten kommen wir da unzweifelhaft wieder mittels der Lagrangeschen



Gleichungen zum Ziele. Wir bezeichnen, wie in § 26 die Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes  $\Omega$  des zweiten Systems in den Richtungen  $\Omega\xi$ ,  $\Omega\eta$ ,  $\Omega\zeta$ , welche augenblicklich die beweglichen Koordinatenachsen haben, mit  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ; ferner die Komponenten der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit des zweiten Systems, also auch des beweglichen Koordinatensystems in denselben Richtungen  $\Omega\xi$ ,  $\Omega\eta$  und  $\Omega\zeta$  mit  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ . Wenn dann ein Punkt mit den Koordinaten  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  bezüglich des beweglichen Koordinatensystems fest mit diesem verbunden wäre, so daß  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  mit der Zeit unveränderlich wären, so wären dessen Geschwindigkeitskomponenten in den Richtungen  $\Omega\xi$ ,  $\Omega\eta$  und  $\Omega\zeta$  nach den Gleichungen 156)

$$446) \quad u + \mu\zeta - \nu\eta, \quad v + \nu\xi - \lambda\zeta, \quad w + \lambda\eta - \mu\xi.$$

Wir können uns die Bewegung des zweiten Systems und damit die des beweglichen Koordinatensystems dadurch gegeben denken, daß uns dessen Anfangslage und die Werte von  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  zu jeder Zeit gegeben sind. Ist die Bewegung des zweiten Systems irgendwie anders gegeben, so können doch daraus die Werte dieser sechs Größen für jede Zeit berechnet werden. Die Koordinaten  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  irgend eines Massenteilchens  $m$  des ersten Systems bezüglich des beweglichen Koordinatensystems sind im allgemeinen nicht mit der Zeit unveränderlich. Ihre Differentialquotienten nach der Zeit seien  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$ . Wir finden daher die Gesamtkomponenten der Geschwindigkeit des Massenteilchens  $m$  in den Richtungen, welche  $\Omega\xi$ ,  $\Omega\eta$  und  $\Omega\zeta$  augenblicklich haben, indem wir zu den drei Ausdrücken 446) noch  $\xi'$  bzw.  $\eta'$  und  $\zeta'$  addieren. Diese drei gesamten Geschwindigkeitskomponenten des Massenteilchens  $m$  sind also

$$\xi' + u + \mu\zeta - \nu\eta, \quad \eta' + v + \nu\xi - \lambda\zeta, \quad \zeta' + w + \lambda\eta - \mu\xi,$$

und die augenblickliche lebendige Kraft des Massenteilchens  $m$  ist

$$T = \frac{m}{2} [(\xi' + u + \mu\zeta - \nu\eta)^2 + (\eta' + v + \nu\xi - \lambda\zeta)^2 + (\zeta' + w + \lambda\eta - \mu\xi)^2].$$

Bezeichnen wir also mit  $\Xi$  die Kraft, welche in der Richtung  $\Omega \xi$  auf das Bewegliche wirkt, so ist die auf die Abszissenrichtung bezügliche Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \xi'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} = \Xi,$$

oder nach Substitution des Wertes für  $T'$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\xi' + u + \mu \zeta - \nu \eta) - \frac{1}{m} \Xi &= \\ = r(\eta' + \nu + \nu \xi - \lambda \zeta) - \mu(\zeta' + w + \lambda \eta - \mu \xi) &= \\ = \nu(\eta' + \nu) - \mu(\zeta' + w) + \xi(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - \lambda(\lambda \xi + \mu \eta + \nu \zeta). \end{aligned}$$

Die auf die beiden anderen Koordinatenachsen bezüglichen Gleichungen entstehen daraus durch zyklische Vertauschung.

Es wäre leicht, Gleichungen abzuleiten, in denen andere zur Bestimmung der Bewegung des zweiten Systems dienende Variable vorkommen, z. B. die Komponenten der Geschwindigkeit von  $\Omega$  und der Rotationsgeschwindigkeit in den Richtungen der fixen Koordinatenachsen, sowie die verschiedenen Zusatz- bzw. Reduktionskräfte geometrisch zu diskutieren. Doch will ich hierauf nicht näher eingehen, da diese allgemeinen Gleichungen bisher keine Anwendung gefunden haben. Es sei nur noch bemerkt, daß, wenn man die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit eines starren Systems in Komponenten zerlegt, zwar die wirkliche augenblickliche Geschwindigkeit jedes Punktes die Superposition der Geschwindigkeiten ist, die er infolge der Komponenten hätte, dies aber keineswegs von den Beschleunigungen gilt, die ja aus unendlich kleinen zweiter Ordnung folgen und unendlich Kleines zweiter Ordnung wurde beim Beweise des Satzes von der Zusammensetzung der Drehungen vernachlässigt. Deshalb sind auch die Zusätze, Reduktions- und Führungskräfte, welche wegen einer Rotation des Bezugssystems anzubringen sind, keineswegs einfach die Superposition derjenigen, welche infolge jeder der Komponenten der Rotation anzubringen wären, wenn diese allein vorhanden wäre.

## § 88. Das Trägheitsgesetz.

Wir wollen nun zum Schlusse auf eine fundamentale Schwierigkeit zurückkommen, welche sich in den einfachsten Grundgesetzen der Mechanik findet, nämlich auf die Formulierung des Trägheitsgesetzes, wenn man keinen absoluten, transzendenten Raum einführen will. Wir sind dieser Schwierigkeit in der einfachsten Weise aus dem Wege gegangen, indem wir von etwas Wirklichem oder Existierendem gar nicht sprachen, sondern die Materie durch bloße Gedankenbilder, die materiellen Punkte ersetzten, unbekümmert darum, ob dies nicht auch in anderer Weise (z. B. unter Zugrundelegung eines anderen Koordinatensystems) mit gleichem Erfolge geschehen könne.

Gedankenbilder zu formen, wie wir wollen, kann uns niemand verwehren und daher auch nicht nebst den materiellen Punkten noch ein Koordinatensystem (das taugliche Bezugssystem) in dieselben aufzunehmen. Wir nennen diese Gedankenbilder nur deshalb hinterher wahr, weil sie uns nützlich sind, die künftigen Erscheinungen (unsere künftigen Empfindungen) möglichst vollständig und mühelos vorauszusagen, d. h. ihnen unsere Willensimpulse anzupassen.

Ein innerer Grund der Behauptung, daß die Gedankenbilder, in denen das Bezugssystem vorkommt, nicht exakt mit der Erfahrung stimmen können, ist mir nicht erfindlich. Ich finde im Gegenteile, daß gerade diese Behauptung a priori etwas über die Erfahrung auszusagen bestrebt ist, was diese uns nicht früher selbst sagte. Ich kann daher in dieser Beziehung Mach nicht beipflichten, welcher, wenn ich ihn recht verstanden habe, daraus, daß unsere Gedanken nur Beziehungen zwischen den Objekten darzustellen haben, schließt, daß das Trägheitsgesetz nur durch die Fixsternwelt bestimmt sein könnte. Wäre das hier entwickelte Bild absolut richtig, so wären oben die Beziehungen zwischen den Objekten so, daß zu ihrer einfachsten Darstellung im Geiste ein solches Bezugssystem gehörte. Daß der Fixsternhimmel bezüglich dieses Bezugs-

systems absolut drehungsfrei ist, wäre keine Notwendigkeit, daß er es sehr angenähert ist, aber wäre aus der großen Entfernung, die bei starker Drehung enorme Zentripetalkräfte fordern würde, erklärbar.

Für jemand, der die ganze, endlich gedachte Fixsternwelt übersähe, bestünde sogar die theoretische Möglichkeit, ihre Drehung mittels des Foucaultschen Pendels oder eines Gyrotrops zu konstatieren, wie wir sie für die Erde konstatieren könnten, wenn uns das Licht und damit die Kenntnis anderer Himmelskörper fehlte. Allerdings wäre diese Konstatierung keine unbedingte. Aber, wollte man sie leugnen, so müßte man die noch weit unnatürlichere und den Voraussetzungen dieses Buches zuwiderlaufende Annahme einer von einer fixen Geraden auf alle Massen ausgeübten, der Masse und Entfernung proportionalen Kraft und dazu noch der entsprechenden, auch von der Geschwindigkeit und Lage im Raume (gegen die Fixsternwelt) abhängigen Coriolisschen Kraft machen. Auch würde ein einziges Foucaultsches Pendel oder Gyrotrop nicht hinreichen; denn da könnte die Möglichkeit so kleiner störender Kräfte wohl kaum sicher verneint werden. Aber wenn die verschiedensten Foucaultschen Pendel, Streintzschen Gyrotrope, nach Lange geschleuderten materiellen Punkte usw. usw. in ihrer relativen Bewegung gegen die Sternenvwelt, die ich natürlich endlich und als Ganzes beobachtbar annehme, alle auf eine Rotation der letzteren hinwiesen, so könnten wir doch als höchstwahrscheinlich hinstellen, daß sich bei Annahme derselben, also Aufnahme eines Bezugssystems in unser Gedankenbild, die Erscheinungen am einfachsten erklären oder sagen wir lieber beschreiben, im Gedanken nachbilden lassen, wie wir ja schon jetzt überzeugt sind, daß sich bei Annahme einer Rotation der Erde die kosmischen Erscheinungen allein in vernünftiger Weise beschreiben lassen.

Daß es einen wirklichen Körper  $\alpha$  gebe, der stets bezüglich unseres tauglichen Bezugssystems ruhe und dasselbe daher ersetzen könnte, wäre eine absurde Idee. Als bloßes Gedankending aber nenne ich es lieber „Bezugssystem“ als

„Körper  $\alpha$ “. Schon der Name „Körper“ scheint mir so unpassend, wie möglich.

Bleiben wir also wieder bei der Annahme, die in diesem Buche beschriebenen Bilder würden die Natur exakt darstellen und die Welt wäre endlich. Dann müßte allerdings ihre durch ihren Schwerpunkt gehende invariable Achse bezüglich jedes tauglichen Bezugssystems ihre Richtung unveränderlich beibehalten und das gesamte Flächenmoment der Welt bezüglich derselben müßte konstant sein. Das hat aber keine andere Bedeutung als die folgende: Gegeben sind uns nur die relativen Lagen aller Teile der Welt zu allen Zeiten. Wir können sie auf ein beliebiges zu jeder Zeit wieder beliebig anders gewähltes Koordinatensystem beziehen und auch je zwei Zeitstrecken nach Belieben gleich oder verschieden lang nennen. Aber nur bei einer bestimmten Bezeichnung der Zeitstrecken als gleich lang und nur bei bestimmten zeitlichen Reihenfolgen der Lagen dieser Koordinatensysteme ist die Bedingung erfüllt, daß die auf sie bezogenen Veränderungen jedes materiellen Punktes der Welt die einfachen in diesem Buche dargelegte Gleichungen der Mechanik erfüllen. Nur wenn dies der Fall ist, nennen wir die zeitliche Reihenfolge der betreffenden Koordinatensysteme ein taugliches Bezugssystem.

Für jedes solche taugliche Bezugssysteme nun muß nach dem Bewiesenen die durch den Schwerpunkt der Welt gehende Achse, bezüglich welcher die Summe der Flächenmomente der Welt ein Maximum ist, eine unveränderliche Lage haben und diese Summe muß selbst eine Konstante sein. Natürlich ist dabei noch vorausgesetzt, daß man sich die Welt überhaupt endlich denken will. Es könnten aber ganz gut die mechanischen Differentialgleichungen für eine solche Reihenfolge von Lagen des Koordinatensystems ihre einfache Form annehmen, für welche das konstante Flächenmoment der Welt um seine durch den Schwerpunkt gehende invariable Achse nicht den Wert Null hat, so daß also gewissermaßen die Welt in Drehung begriffen wäre, die freilich im selben Maße klein sein müßte als die Welt groß ist.

So gänzlich unwahrscheinlich es ist, daß unsere Kenntnisse wirklich sich jemals so ausbreiten werden, so können wir uns doch im Gedanken in die Lage versetzen, daß wir die ganze Fixsternwelt, wenn wir uns dieselbe überhaupt endlich denken, so gut kennen würden, als wir heute unsere Erde kennen und daß wir eine Drehung derselben so sicher nachweisen könnten, als die der Erde. Wenn es das Licht nicht gäbe, uns also außer der Erde kein Himmelskörper bekannt wäre, so wären wir sicher viel später zum Begriffe der absoluten Drehung gelangt. Wir hätten aber auch sicher durch Versuche an Gyroskopen, Pendeln usw. dazu gelangen können und wären auch wahrscheinlich dazu gelangt. Es ist also keineswegs bloß die Beziehung zum Fixsternhimmel, was diesen Begriff bedingt.

Daß die sukzessiven Lagen der Hauptträgheitsachsen der Welt bezüglich ihres Schwerpunkts ein solches taugliches Bezugssystem bilden, wäre natürlich möglich und unserer bisherigen Erfahrung nicht widersprechend, nach welcher beliebige, unveränderlich mit dem nahe unveränderlichen Fixsternhimmel verbundene Achsen taugliche Bezugssysteme sind. Unter dieser Annahme wäre die Aufnahme eines besonderen Koordinatensystems überflüssig, da dessen Lage aus den sukzessiven relativen Lagen aller Teile der Welt für jeden Zeitmoment berechnet werden könnte. Da aber die Richtigkeit einer solchen Annahme durch nichts bewiesen oder beweisbar ist, so ist es zwar sicher gut, auf ihre Möglichkeit hinzuweisen, es wäre aber offenbar eine unerlaubte Beschränkung der Allgemeinheit, sie an die Spitze der Mechanik zu stellen.

Ganz hiervon unabhängig ist die Frage, ob die hier entwickelten mechanischen Gleichungen und damit auch das Trägheitsgesetz nicht vielleicht bloß angenähert richtig sind und ob nicht bei einer richtigeren Formulierung die Unwahrscheinlichkeit oder sagen wir Inhomogenität, die in der Notwendigkeit der Aufnahme eines Koordinatensystems neben den materiellen Punkten in das Bild liegt, von selbst wegfällt.

Da wies Mach auf die Möglichkeit hin, daß wir ein richtigeres Bild durch die Annahme erhalten, nur die Be-

schleunigung der Entfernungsänderung je zweier Massenteilchen sei hauptsächlich durch die benachbarten Massen, die Geschwindigkeit dieser Änderung aber durch eine Formel bestimmt, in welcher die sehr entfernten Massen den Ausschlag geben. Dadurch wird natürlich jede Aufnahme eines Koordinatensystems in das Bild vernieden, da jetzt nur von Entfernungen die Rede ist. Freilich führt Mach dafür andere Schwierigkeiten ein, so die Endlichkeit der Welt, eine Art Fernwirkung auf die allergrößten Distanzen usw. Diese Schwierigkeiten schienen mir speziell nicht so groß, wie vielleicht manchem anderen Physiker, sie haben aber immerhin das Mißliche, daß sie jede erfahrungsmäßige Kontrolle für alle Zeiten auszuschließen scheinen. Auch die exakte Ableitung des Superpositionsprinzips durch fortwährende Anwendung der neuen Form des Trägheitsgesetzes auf den Schwerpunkt der in Wechselwirkung begriffenen Massen scheint mir nicht unmittelbar auf der Hand zu liegen. Ferner ist  $\frac{d^2 \sum m r}{dt^2} = 0$  erst eine Gleichung, also doch nicht der Aussage ganz äquivalent, daß sich ein Punkt geradlinig und gleichförmig bewegt.

Unter allen Umständen erscheint mir eine derartige Erweiterung unseres Blickes durch den Hinweis auf die Möglichkeit, daß das, was uns das Gewisseste und Naheliegendste scheint, vielleicht nur annähernd richtig ist, höchst wertvoll. Es steht in einer Linie mit dem Hinweise auf die Möglichkeit, daß sich die Entfernungen der Fixsterne vielleicht nur in einem nichteuklidischen Raume von enorm geringer Krümmung konstruieren lassen, was ja insofern auch mit dem Trägheitsgesetze zusammenhängt, daß dann ein bewegter Körper, auf den keine Kräfte wirken, in Äonen an die alte Stelle zurückkehren müßte, falls das betreffende Krümmungsmaß positiv ist.

In allen diesen Betrachtungen gingen wir von der Voraussetzung der Endlichkeit der ganzen Welt aus. Dankt man sich die Welt unendlich, so werden Begriffe, wie der Schwerpunkt, die invariable Achse, die Hauptträgheitsachsen usw. der Welt vollkommen gegenstandslos. Man müßte

dann annehmen, daß das Trägheitsgesetz durch eine Formel bestimmt wird, nach welcher die naheliegenden Massen von verschwindenden, die in Siriusweiten befindlichen vom größten, die noch viel entfernteren Massen aber wieder von verschwindendem Einfluß auf die Formulierung des Trägheitsgesetzes sind.

Alle Schwierigkeiten bei Formulierung des Trägheitsgesetzes vermeidet die elektromagnetische Theorie der Materie, indem sie annimmt, daß die Maxwellschen Gleichungen für das Verhalten des Lichtäthers und die Bewegung der Elektronen in demselben das Primäre sind, aus dem für letztere das Trägheitsgesetz für die Bewegung relativ gegen den Lichtäther und die übrigen Gesetze der Mechanik folgen. Für die Teilchen des Lichtäthers aber gilt das Trägheitsgesetz nicht; die Maxwellschen Gleichungen müßten so gefaßt werden, daß sie bloß die Wechselwirkung nebeneinanderliegender Volumenelemente bestimmen, zu ihrer Fassung also kein absoluter Raum erforderlich ist. Eine Entwicklung dieser gegenwärtig noch ganz unausgearbeiteten Theorie liegt uns hier ferne.

---



# Berichtigungen.

S. 41 Z. 11 v. o.  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \omega_k}{\partial p_h} = \frac{\partial \omega_k}{\partial p_h}$  statt  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \omega_k}{\partial p_h} = \frac{\partial \omega_k}{\partial p_h}$ .

S. 114 Z. 15 v. o.  $d\omega_2 = H_2^1 dp_1 + H_2^2 dp_2$  statt  $d\omega_2 = H_2^1 dp_1 = H_2^2 dp_2$ .

S. 114 Z. 21 v. o.

$$\frac{\partial H_2^1}{\partial p_1} = p_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_1} = -p_2^2 \alpha_2 \text{ statt } \frac{\partial H_2^1}{\partial p_1} = p_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_1} + p_2^2 \alpha_1.$$

S. 188 Z. 1 v. u. muß lauten:

$$\Omega = \int_0^1 \left[ T - V - \sum_1^s h \left( p'_h - \frac{d p_h}{dt} \right) \frac{\partial T}{\partial p'_h} \right] dt.$$

S. 184 Z. 12 bis 14 v. o. müssen lauten:

$$\delta p'_i \frac{\partial T}{\partial p'_i} + \sum_1^s h \left( p'_h - \frac{d p_h}{dt} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial p'_h \partial p'_i} \delta p'_i$$

und daher wird:

$$\delta'_i \Omega = \int_0^1 \delta p'_i dt \sum_1^s h \left( p'_h - \frac{d p_h}{dt} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial p'_h \partial p'_i}.$$

S. 184 Z. 9 v. u. muß lauten:

$$\sum_1^s h \left( p'_h - \frac{d p_h}{dt} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial p'_h \partial p'_i} = 0.$$

S. 184 Z. 7 v. u.  $\frac{\partial^2 T}{\partial p'_h \partial p'_i} = a_{hi}$  statt  $\frac{\partial T}{\partial p'_h \partial p'_i} = a_{hi}$ .

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

Früher erschien:

Vorlesungen

über die

# Prinzipie der Mechanik.

Von

Ludwig Boltzmann,

Professor der theoretischen Physik an der Universität Wien.

I. Teil:

enthaltend die Prinzipie, bei denen nicht Ausdrücke nach der Zeit integriert werden, welche Variationen der Koordinaten oder ihrer Ableitungen nach der Zeit enthalten.

X, 241 S. mit 10 Figuren. 1897. M. 6.—; geb. M. 7.—.

## Aus den Besprechungen:

*Zeitschrift für physikal. Chemie:* Unter allen Umständen gewährt es einen großen Reiz, zu beobachten, wie sich ein Mann, wie der Verfasser, in dem von ihm gewählten eigentümlichen Fahrwasser bewegt, und kein Leser, stehe er nun auf dem Standpunkte des Verfassers, oder auf einem entgegengesetzten, wird das Buch ohne Nutzen und Vergnügen aus der Hand legen.

*Zeitschrift für österreichische Gymnasien:* Wir müssen gestehen, daß das Studium des vorliegenden Werkes ein in jeder Beziehung genüßreiches ist und durch dasselbe viele Anregungen für weitere Untersuchungen gegeben worden. Das was der Verfasser anstrebte, Klarheit in die Prinzipien der Mechanik zu bringen und die Beziehungen derselben darzulegen, ist ihm vollständig gelungen.

*Fortschritte der Physik:* Das Buch ist eine eigentümliche Darstellung der Begriffe und Sätze der Mechanik von einem allgemeinen Standpunkte aus, unter fortlaufender Kritik von Seiten der Philosophie und der Mathematik. In dieser Gestalt wird es berufen sein, in der Folgezeit einen bestimmenden Einfluß auf die Vortragswelse der theoretischen Mechanik auszuüben, mag es nun Bestätigung oder Widerspruch hervorrufen. Obgleich in der Vorrede der Anspruch auf Vollständigkeit und Neuheit abgelehnt wird, so dürfte doch keine wichtige allgemeine Frage unberührt geblieben sein, wenn schon manchmal nur in wenigen Sätzen eine Erwähnung geschehen ist, und bei einem so originalen Denker, wie Boltzmann, findet der Leser in der Behandlung von Gegenständen, die scheinbar abgeschlossen sind, immer wieder neue Beleuchtungen, welche Klarheit über die Dinge verbreiten.

---

## Gustav Robert Kirchhoff

Gedächtnisrede

von Ludwig Boltzmann.

82 Seiten mit Kirchhoffs Porträt. 1888. M. 1.—.

Vorlesungen über die Maxwell'sche Theorie  
der  
**Elektricität und des Lichtes**

von

**Dr. Ludwig Boltzmann,**

Professor der theoretischen Physik an der Universität Wien.

**I. Teil:**

**Ableitung der allgemeinen Gleichungen für ruhende, homogene, isotrope Körper.**

XII, 189 S. mit vielen Textfig. u. 2 lith. Taf. 1891. M. 6.—, geb. M. 8.—

**II. Teil:**

**Verhältnis zur Fernwirkungstheorie, spezielle Fälle der Elektrostatik, stationäre Strömung und Induction.**

VIII, 166 S. mit Textfiguren u. 2 Tabellen. 1898. M. 5.—, geb. M. 6.—

**Aus den Besprechungen:**

*Zeitschr. f. phys. u. chem. Unt.:* . . . Nur ein Boltzmann konnte den oft unentwirrbar komplizierten Plan des Maxwell'schen Lehrgebäudes bis in alle Details so vorstehen, um ihn mit dieser Klarheit bloßzulegen. Aus den einfachsten Annahmen — den Gesetzen der cyklischen Bewegungen und der Lagrange'schen Gleichung — entwickeln sich die weittragendsten Schlüsse mit einer Klarheit und Eleganz, die neben der vollendeten wissenschaftlichen Befriedigung auch einen hervorragenden ästhetischen Genuß bietet.

*Elektrotechn. Zeitschr.:* . . . Dem Werke eines unserer bedeutendsten mathematischen Physiker wird zweifellos allseitig das größte Interesse entgegengebracht werden.

. . . Von allen Versuchen, welche bisher unternommen wurden, um die Maxwell'sche Theorie in folgerechter Entwicklung darzustellen, müssen die Boltzmann'schen Vorlesungen an erster Stelle genannt werden.

*Zeitschr. f. d. österr. Gymnas.:* . . . Die Arbeit ist zweifelsohne unter allen bisher erschienenen die geeignetste, um den Zusammenhang der alten und neuen Elektrizitätslehre zu erfassen und das leichtere Studium Maxwell's anzubahnen.

*Zeitschr. f. d. Realschulw.:* . . . Die Fülle schöner Details, die Eleganz der mathematischen Darlegungen, die trotz der großen Ansprüche, die an den Leser gestellt worden, doch äußerst klare Ausdrucksweise werden dem Buche gewiß viele Freunde sichern.

*Deutsche Literaturztg.:* . . . Die Darstellung, die sich durch Klarheit, Kürze und Übersichtlichkeit auszeichnet, läßt die Maxwell'schen Ideen in einem neuen Lichte erscheinen und ist wohl geeignet, uns auch das, was in der Theorie zuerst fremdartig anmutet, zum Verständnis zu bringen. Das Buch, das erste seiner Art, das in Deutschland veröffentlicht ist, kann daher als eine wesentliche Bereicherung der Literatur über Maxwell's Theorie bezeichnet werden.

*Beibl. d. Annalen d. Phys. u. Ch.:* . . . Selbst der mit der Maxwell'schen Theorie in ihren verschiedenen Formen schon voll Vertraute wird das originell geschriebene, an Anregungen und an pädagogischen Feinheiten in der Darstellung reiche Buch mit Genuß lesen.

# Vorlesungen über Gastheorie

von

**Dr. Ludwig Boltzmann,**

Professor der theoretischen Physik an der Universität Wien.

## I. Teil:

**Theorie der Gase mit einatomigen Molekülen, deren Dimensionen gegen die mittlere Weglänge verschwinden.**

IV, 200 Seiten. 1896. M. 6.—, geb. M. 7.—.

## II. Teil:

**Theorie von der Van der Waals'; Gase mit zusammengesetzten Molekülen; Gasdissoziation; Schlußbemerkungen.**

X, 265 Seiten. 1898. M. 7.—; geb. M. 8.—.

In dem vorliegenden Werke, das aus an der Münchener und Wiener Universität gehaltenen Vorlesungen entstanden ist, versucht der Verfasser vor allem die bahnbrechenden Arbeiten von Clausius und Maxwell übersichtlich wiederzugeben. Aber auch seinen eigenen Arbeiten ist Platz gegönnt.

## Aus den Besprechungen:

**Lit. Centralbl.:** Der Verfasser, der im Laufe seiner Studien selbst namhafte Beiträge zur Entwicklung der kinetischen Gastheorie geliefert hat, bringt uns eine hochinteressante Bearbeitung des gesamten Gebietes, indem er zugleich vielfach neue Gesichtspunkte darbietet und neues Geschütz ins Feld führt gegen die sich mehrenden Angriffe von Seiten der Energetik. . . . Das Werk ist überall verständlich geschrieben und birgt eine Fülle der schätzbarsten Untersuchungen.

**Elektrotechnische Zeitschrift:** Das Buch ist nicht nur ein hervorragendes Lehrbuch, das die schwierigsten Gegenstände glänzend behandelt, es ist zugleich ein Kampfbuch gegen die energetischen Anschauungen der neueren Zeit und als solches für die Anhänger der Energetik ebenso unentbehrlich, wie es als Publikation einer der ersten deutschen theoretischen Physiker den Interessen aller Mathematiker und Physiker sicher ist.

**Zeitschrift für Realschulwesen, Wien:** Das Erscheinen eines Buches von Boltzmann ist ein literarisches Ereignis. . . . Wir unterfangen uns zum Schluß gar nicht, das Werk den Lesern dieser Zeitschrift noch zu empfehlen, sondern sind überzeugt, daß es ohnedies die verdiente Verbreitung finden und allenfalls Nutzen bringen wird.

**Journ. of Phys. Chem.:** . . . In conclusion, the student desirous of studying the Kinetic Theorie of Gases can hardly do better than take up this book, confident that he will here find a clear and mathematically sound treatment of the subject.

Vorlesungen

über

# Theoretische Physik

von

H. von Helmholtz.

== In sechs Bänden. ==

- I. Band, I. Abt.: Einleitung zu den Vorlesungen, herausgegeben von Arthur König und Carl Runge. [VIII, 60 Seiten mit 1 Porträt.] 1903. M. 3.—; geb. M. 4.50.
- I. Band, 2. Abt.: Dynamik diskreter Massenzentren, herausgegeben von Otto Krüger-Menzel. [X, 380 Seiten mit 21 Figuren.] 1903. M. 15.—; geb. M. 18.50.
- II. Band: Dynamik kontinuierlich verbreiteter Massen, herausgegeben von Otto Krüger-Menzel. [VIII, 248 Seiten mit 9 Figuren.] 1902. M. 12.—; geb. M. 13.50.
- III. Band: Mathematische Prinzipien der Akustik, herausgegeben von Arthur König und Carl Runge. [XIV, 256 Seiten mit 21 Figuren.] 1903. M. 12.—; geb. M. 13.50.
- IV. Band: Elektrodynamik und Theorie des Magnetismus, herausgegeben von Otto Krüger-Menzel. Soll bald erscheinen.
- V. Band: Elektromagnetische Theorie des Lichts, herausgegeben von Arthur König und Carl Runge. [XII, 370 Seiten mit 54 Figuren.] 1907. M. 14.—; geb. M. 15.50.
- VI. Band: Theorie der Wärme, herausgegeben von Franz Richarz. [XI, 418 S. mit 40 Fig.] 1903. M. 10.—; geb. M. 17.50.

## Aus den Besprechungen:

Elektrot. Zeitschr.: Wir begnügen uns damit, der Genugthuung Ausdruck zu geben, daß II's wortvolle Vorlesungen in dieser Weise erhalten bleiben und wünschen dem Unternehmen guten Fortgang und guten Erfolg.

Unterrichtsbücher für Mathematik und Naturwissenschaften: Die Herausgabe der gesamten Vorlesungen, die Helmholtz über theoretische Physik gehalten hat, ist ein wichtiges Ereignis für die Wissenschaft. Denn wenn auch die großen Ideen, mit denen Helmholtz die Wissenschaft befruchtete, die Resultate seiner Forschungen, durch die er ihr neue Bahnen wies, in seinen wissenschaftlichen Abhandlungen niedergelegt sind, so enthalten doch auch seine Vorlesungen bei der eigenartigen Art, wie sie entstanden, viele neue Gedanken, tiefgehende Anregungen, die, wie sie schon auf den engeren Kreis seiner Schüler gewirkt haben, so jetzt auch auf die weitesten Kreise wirken werden.

Festschrift  
**Ludwig Boltzmann**

gewidmet

zum sechzigsten Geburtstage 20. Februar 1904.

XII, 930 Seiten. Mit einem Porträt, 101 Abbildungen im Text  
und 2 Tafeln. 1904. M. 18.—.

Die Festschrift enthält 117 Abhandlungen aus den Gebieten der Mathematik, Physik, Elektrotechnik und physikalischen Chemie, und die bedeutendsten Fachgelehrten haben daran mitgearbeitet, wir nennen nur die Namen:

S. Arrhenius, H. du Bois, O. Chwolson, P. Duhem, H. Ebert, J. H. van't Hoff, H. Kayser, W. König, E. Lecher, O. Lehmann, H. A. Lorentz, E. Mach, W. Nernst, O. Neumann, L. Pfundler, M. Planck, F. Richarz, E. Riecke, A. Righi, G. Runge, A. Sommerfeld, J. D. van der Waals, E. Wiedemann, W. Wien u. v. a.

**Aus den Besprechungen:**

Zeitschrift für das Realschulwesen, XXIX. Jahrg., Heft 4: Fast alle Gebiete der Physik sind vertreten, in erster Reihe die Elektrizitätslehre, dann die Optik, die Gastheorie, die Wärmelehre, die Molekularphysik, die Mechanik, die physikalische Chemie; viele der Arbeiten knüpfen unmittelbar an Boltzmanns eigene Forschungen an. Einige wenige der Arbeiten gehören der reinen Mathematik zu. Der internationale Charakter des Huldigungsaktes drückt sich in der nationalen Zugehörigkeit der Mitarbeiter und in den Sprachen aus, die hier zu einem harmonischen Akkord zusammenklingen: Außer aus Österreich (29) und Deutschland (44) sind Beiträge eingelangt aus Amerika (8), England (7), Frankreich (6), Rußland (6), Holland (5), Italien (4), Schweden (4), Norwegen (1), Belgien (1), Australien (1), Japan (1), die in fünf verschiedenen Sprachen abgefaßt sind: Deutsch (90), Englisch (16), Französisch (7), Italienisch (4), Holländisch (1).

Was bei der Festschrift noch besonders freudig berührt ist, daß sie nicht einen Nachruf auf einen Gelehrten bedeutet, der seine Bahn bereits durchgemessen hat, sondern einem Manne gilt, der noch in der vollen Kraft des Schaffens unter uns wirkt.

Cz.

**Die Kontinuität  
des gasförmigen und flüssigen Zustandes**

von

**J. D. van der Waals.**

2 Teile.

gr. 8°. 1899—1900. M. 9.—; geb. M. 11.—.

I. Teil: Zweite, verbesserte Aufl. VIII, 182 S. mit 2 Tafeln. 1899.  
M. 4.—; geb. M. 5.—.

II. Teil: Binäre Gemische. gr. 8°. 192 S. mit 23 Figuren im Text. 1900.  
M. 5.—; geb. M. 6.—.

# Schloemilchs Handbuch der Mathematik

Zweite Auflage.

Herausgegeben von

**Prof. Dr. R. Henke**

Korrektor d. Anna-Realgymnasiums  
in Dresden

**Dr. R. Heger**

Hon.-Professor an der K. S. Technischen  
Hochschule und Gymnasial-Oberlehrer  
in Dresden.

8 Bände. Lex. 8°. Mit vielen Abbildungen im Text und auf Tafeln.  
1904. Preis M. 60.—; in Halbfanz gebunden M. 67.60.

- I. Band. Elementarmathematik. XII, 611 Seiten mit 321 Figuren  
1904. M. 20.—, gebunden M. 22.50.  
II. Band. Höhere Mathematik, I. Teil. VIII, 765 Seiten mit 281  
Figuren und 12 Tafeln. 1904. M. 20.—, geb. M. 22.50.  
III. Band. Höhere Mathematik, II. Teil. VIII, 622 Seiten mit 94 Fig.  
und 20 Tafeln. 1904. M. 20.—, gebunden M. 22.50.

Schloemilchs Handbuch der Mathematik, das in seiner ersten Auflage innerhalb des Rahmens der Enzyklopädie der Naturwissenschaften erschien, ist jetzt gänzlich umgearbeitet und, auf drei Bände erweitert, innerhalb Jahresfrist wieder aufgelegt worden.

An Stolle des verstorbenen Verfassers der Abteilung über Elementarmathematik F. Reidt, besorgte Herr Professor Dr. R. Henke in Dresden die Bearbeitung dieser Abteilung, während die Abteilung über höhere Mathematik wieder, wie bei der ersten Auflage, Herr Professor Dr. R. Heger in Dresden bearbeitete.

Die Ausdehnung, die die Mathematik in den letzten Jahren erfahren hat, machte es notwendig, das bisher in zwei Bänden erschienene Werk in drei Bände zu zerlegen und mehrere neue Abschnitte einzufügen; es enthält nunmehr Band I die Elementarmathematik (Arithmetik und Algebra, Planimetrie, Trigonometrie und Stereometrie), Band II und III die höhere Mathematik, und zwar Band II die darstellende Geometrie, die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes und die Differentialrechnung, Band III die Integralrechnung, einen Abriss der Ausgleichsrechnung (auf Henkes Grundlage), die mathematischen Grundlagen der Lebens- und Invalidenversicherung (mit versicherungstechnischen Tabellen) und eine kurzgefaßte Darstellung der mathematischen Kartontentwurflehre sowie ein Sachregister zu allen drei Bänden.

## Aus den Besprechungen:

**Zeitschrift für österreichische Gymnasien:** Wir glauben, daß das Buch für das Selbststudium auch schwieriger Partien der elementaren und höheren Mathematik sich sehr gut eignen wird. Die Verf. mußten zu diesem Zwecke manche Partie breiter gestalten, als es in einer Abhandlung möglich ist, und es mußten auch mehrfach Wiederholungen eintreten. Die Klarheit der Darstellung, die nimmigste Unterstützung des Textes durch sehr gelungen ausgeführte Figuren und Tafeln, wie sich diese auf die darstellende Geometrie beziehen, werden jedenfalls zur Erreichung des angestrebten Zweckes beitragen.

**Zeitschrift für physikalische Chemie:** Man findet die Darstellung überall ungenügend schlicht bei aller sachlichen Strenge, und so wird der Jünger, der sich diesen seit der halbvergessenen Schulkult vom Geruch außerordentlicher Schwierigkeiten erfüllten Hallen der Not gehorchend, nicht dem eignen Trieb, zu nähern wagt, sich trübselig berührt fühlen von der Unmittelbarkeit, mit der er geführt wird.

Es ist keinem Zweifel unterworfen, daß das bewährte Werk sich auch den neu heranwachsenden Geschlechtern als ein zuverlässiger und verhältnismäßig bequemer Führer bewähren und Lieb machen wird.

